

UNIVERSIDAD DEL CEMA

Buenos Aires

Argentina

Serie

DOCUMENTOS DE TRABAJO

Área: Ingeniería

**EVALUACIÓN Y CONTROL
DEL GASTO ENERGÉTICO**

Gabriel Pérez Lance

Marzo 2010

Nro. 418

ISBN 978-987-1062-51-5

Queda hecho el depósito que marca la Ley 11.723

Copyright – UNIVERSIDAD DEL CEMA

www.cema.edu.ar/publicaciones/doc_trabajo.html

UCEMA: Av. Córdoba 374, C1054AAP Buenos Aires, Argentina

ISSN 1668-4575 (impreso), ISSN 1668-4583 (en línea)

Editor: Jorge M. Streb; asistente editorial: Valeria Dowding <jae@cema.edu.ar>

Pérez Lance, Gabriel

Evaluación y control del gasto energético. - 1a ed. - Buenos Aires : Universidad del CEMA, 2009.

18 p. ; 22x15 cm.

ISBN 978-987-1062-51-5

1. Ingeniería. I. Título

CDD 620

Fecha de catalogación: 28/12/2009

Evaluación y Control del Gasto Energético

Gabriel Pérez Lance ⁽¹⁾

Resumen

El presente trabajo analiza y describe un modo de realizar mediciones y monitorear el consumo eléctrico mediante la aplicación de la *Transformada de Fourier de Tiempo Discreto* (DTFT), implementada en un programa de computadora.

De ésta manera se puede tener información del consumo en tiempo real y durante las 24 horas. Al mismo tiempo es posible elaborar estadísticas, proyecciones y comparaciones vinculadas a este tipo de datos, como así también detectar posibles funcionamientos anómalos de determinados equipos.

1. Introducción

Consideraremos la teoría de espacios vectoriales aplicada al estudio de las señales. Dichas señales, son funciones del tiempo $f(t)$, y serán los vectores de los mencionados espacios. La idea es que podremos escribir una señal como combinación lineal de un conjunto de señales llamadas armónicas. Esto tiene la ventaja de que si conocemos cómo responde un sistema a un determinado armónico, si el sistema es lineal podremos conocer la respuesta del mismo a una señal cualquiera.

Así, si tenemos la información del contenido armónico o espectro de una señal, tendremos toda la información necesaria para saber cómo se comportará un sistema o bien qué energía transporta dicha señal, y sobre todo que energía contiene en cada armónico y por lo tanto en cada frecuencia.

Una onda periódica se puede pensar como suma de ondas sinusoidales donde la senoide de menor frecuencia es llamada fundamental y las demás tienen una frecuencia que es múltiplo de esa frecuencia fundamental. A este tipo de onda se la denomina poliarmónica. La tensión eléctrica que llega a un medidor en una empresa o un particular, es una onda senoidal prácticamente pura, es decir tiene muy poco ruido eléctrico y no contiene otros armónicos. Por otra parte, en función del consumo eléctrico de la empresa o domicilio, se generará una corriente que será en el caso más general, una poliarmónica, pues debido a elementos alineales como los motores o núcleos de transformadores, aparecerán otros armónicos (especialmente tercero y quinto); también influyen los variadores electrónicos de potencia que generan muchos más armónicos y ruido eléctrico.

⁽¹⁾ Los puntos de vista expresados en esta publicación son los del autor y no necesariamente los de la Universidad del CEMA.

Tomando entonces muestras de la tensión y la corriente, podremos ingresarlas en una computadora y procesar esa información; y con ello tener en tiempo real el consumo eléctrico del lugar monitoreado y realizar proyecciones y estadísticas.

2. Fundamentos del modelo

Los espacios vectoriales que utilizaremos para representar a las señales, deben ser normados y con producto hermítico.

Axiomas de producto hermítico:

- 1) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{0} = 0$
- 2) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})^*$
- 3) $(\alpha \mathbf{u}) \cdot (\beta \mathbf{v}) = \alpha \beta^* (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$
- 4) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{w} + \mathbf{z}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{z}$ (1)

$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}$ son vectores del espacio vectorial $(V, +, K, \cdot)$

α y β son escalares del cuerpo K

K es el conjunto de los números complejos C

$*$: representa la operación de conjugación en el campo complejo

Definición de norma:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \quad (2)$$

Dentro del espacio de la señal, trataremos a aquellas funciones seccionalmente continuas y con un número finito de discontinuidades en el intervalo considerado.

Denominaremos $L_p(t_1, t_2)$ a dicho espacio vectorial.

2.1 Definiciones de producto hermítico en el espacio de las señales

Sean $f(t)$ y $g(t)$ señales de $L_p(t_1, t_2)$ y $p(t) \geq 0$: núcleo

$$f(t) \cdot g(t) = \int_{t_1}^{t_2} f(t) g(t)^* p(t) dt \quad (3)$$

Se suele definir para señales periódicas de período T :

$$f(t) \cdot g(t) = \frac{1}{T} \int_{(T)} f(t) g(t)^* dt \quad (4)$$

y para señales no periódicas:

$$f(t) \cdot g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(t)^* dt \quad (5)$$

2.2 Sistema Ortonormal de Funciones (SON)

$\{\varphi_n(t)\}$ es un SON de funciones en $Lp(t_1, t_2)$, sii $\forall n \forall m$:

$$\varphi_n(t) \cdot \varphi_m(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases} \quad (6)$$

2.3 Sistema Ortonormal Cerrado

Un sistema ortonormal de funciones es cerrado en $Lp(t_1, t_2)$ sii

$$\forall x(t) \in Lp(t_1, t_2) : \exists c_n / \sum_{\forall n} c_n \cdot \varphi_n(t) \text{ converge a } x(t)$$

2.4 Sistema Ortonormal Completo

Un sistema ortonormal de funciones es completo en $Lp(t_1, t_2)$ sii

$$\neg \exists x(t) \neq 0 \in Lp(t_1, t_2) : \forall n \ x(t) \cdot \varphi_n(t) = 0$$

2.5 Serie generalizada de Fourier

Sea $x(t) \in Lp(t_1, t_2)$ y $\{\varphi_n(t)\}$: un SON de funciones en $Lp(t_1, t_2)$ con respecto al núcleo $p(t) \geq 0$

Entonces podemos escribir $x(t)$ como combinación lineal de los vectores de base $\varphi_n(t)$ según:

$$x(t) = \sum_{\forall n} c_n \cdot \varphi_n(t) \quad (7)$$

y los escalares necesarios para la combinación lineal son:

$$c_n = \int_{t_1}^{t_2} x(t) \varphi_n(t)^* p(t) dt \quad (8)$$

Esto se puede justificar mediante el concepto de proyección en un espacio vectorial (consideraremos $p(t)=1$)

Podemos escribir: $x(t) = \varphi_1(t) c_1 + \varphi_2(t) c_2 + \dots + e(t)$ (9)

donde $e(t)$ representa el error que se comete si se considera sólo una cantidad finita de funciones $\varphi_n(t)$.

Si definimos una matriz **A** y otra matriz **C** como:

$$A = [\varphi_1(t) \quad \varphi_2(t) \quad \dots] \quad C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \end{bmatrix} \quad (10)$$

Entonces podemos plantear la ecuación anterior matricialmente

$$A \cdot C = x(t) - e(t) \quad (11)$$

Podemos ver que el miembro de la izquierda representa un vector en el espacio de la señal que pertenece al subespacio generado por los vectores base $\varphi_n(t)$ considerados. Por otra parte, $x(t)$ no tiene necesariamente que pertenecer a este subespacio, y en el caso general no pertenecerá. Por lo tanto habrá un $e(t)$ no nulo.

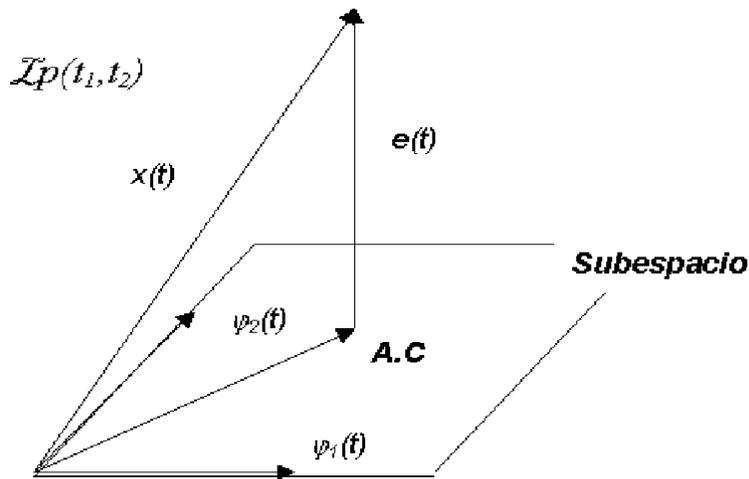


fig. 1

Si tomamos como consigna minimizar la norma del error, entonces se trata de un problema de proyección ortogonal de la señal $x(t)$ sobre el subespacio generado por las $\varphi_n(t)$.

Para proyectar sobre dicho subespacio, podemos multiplicar en ambos miembros de la (11) a izquierda por la transpuesta de A (y teniendo en cuenta la 1.3 de producto hermítico):

$$(A^t \cdot A) \cdot C^* = A^t x(t) - A^t e(t) \quad (12)$$

Pero dado que para minimizar la norma, debe ocurrir que $e(t)$ pertenezca al complemento ortogonal del subespacio en cuestión, entonces $A^t e(t) = 0$

Así,

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \cdot \varphi_1 & \varphi_1 \cdot \varphi_2 & \dots \\ \varphi_2 \cdot \varphi_1 & \varphi_2 \cdot \varphi_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1^* \\ c_2^* \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \dots \end{bmatrix} \cdot x(t) \quad (13)$$

Donde se puede ver que la matriz $A^t \cdot A$ resulta ser bajo la hipótesis de que $\varphi_n(t)$ sea un SON, la matriz identidad

por lo que obtenemos:

$$\begin{bmatrix} c_1^* \\ c_2^* \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \cdot x(t) \\ \varphi_2 \cdot x(t) \\ \dots \end{bmatrix} \quad (14)$$

y por la 1.2 de producto hermítico:

$$c_n = x(t) \cdot \varphi_n(t)$$

$$c_n = \int_{t_1}^{t_2} x(t) \varphi_n(t)^* dt \quad (15)$$

2.6 Enfoque mediante consideraciones de energía

Si definimos:

$$\langle \varepsilon^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} \|e(t)\|^2 dt \quad (16)$$

entonces por (9) es:

$$\langle \varepsilon^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} [x(t) - c_1 \varphi_1(t) - c_2 \varphi_2(t) - \dots]^2 dt \quad (17)$$

luego, si buscamos minimizar $\langle \varepsilon^2 \rangle$, los c_n deben ser elegidos de modo que:

$$\forall n: \frac{\partial}{\partial c_n} \langle \varepsilon^2 \rangle = 0 \quad \text{es decir,}$$

$$\frac{-2}{T} \int_{t_1}^{t_2} \varphi_n(t) \cdot [x(t) - c_1 \varphi_1(t) - c_2 \varphi_2(t) - \dots] dt = 0 \quad (18)$$

desarrollando en la (18) y aplicando propiedades de producto hermítico, se obtiene un sistema matricial idéntico a (13) y así se llega nuevamente a:

$$c_n = \int_{t_1}^{t_2} x(t) \varphi_n(t)^* dt \quad (15)$$

El sistema de ecuaciones que representa (13) es un sistema que se podría resolver aún sin la hipótesis de que las $\varphi_n(t)$ determinen un SON. La ventaja de asumir esta hipótesis es que de esa manera las ecuaciones que forman el sistema quedan desacopladas y por lo tanto no influye para el cálculo de un c_n el valor de otro c_m .

En el caso de tener un sistema que no sea ortonormal, se podría obtener uno que sí lo fuera mediante el *proceso de ortonormalización de Gram - Schmidt*.

2.7 Relación de Parseval

Sea el espacio de las señales y un SON para un dado producto hermítico definido en dicho espacio.

Si $x(t)$ es una señal de ese espacio, entonces:

$$x(t) = \sum_{\forall n} c_n \cdot \varphi_n(t) \quad (7)$$

Entonces el cuadrado de la norma de la señal $x(t)$ será:

$$\begin{aligned} \|x(t)\|^2 &= x(t) \cdot x(t) = \sum_{\forall n} c_n \cdot \varphi_n(t) \cdot \sum_{\forall n} c_n \cdot \varphi_n(t) = \\ &= \sum_{\forall n} \sum_{\forall m} c_n \varphi_n(t) \cdot c_m \varphi_m(t) = \sum_{\forall n} c_n c_n^* = \sum_{\forall n} |c_n|^2 \end{aligned} \quad (19)$$

Esta relación, permite calcular la energía de la señal a partir de las componentes armónicas de su espectro.

2.8 Aplicación de los conceptos mencionados en algunos casos concretos

Consideremos la sucesión:

$$\varphi_n(t) = \cos(n \cdot \arccos(t)) \quad (20) \quad \text{en el intervalo } (-1;1) \text{ y sobre el núcleo:}$$

$$p(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \quad (21)$$

entonces podríamos calcular:

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) \cdot \varphi_m(t) &= \int_{-1}^1 \cos(n \cdot \arccos(t)) \cos(m \cdot \arccos(t)) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \\ &= -\int_{\pi}^0 \cos(n \cdot \gamma) \cos(m \cdot \gamma) d\gamma \quad \text{donde : } \gamma = \arccos(t) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [\cos(n\gamma + m\gamma) + \cos(n\gamma - m\gamma)] d\gamma = \quad \text{si } n \neq m \\ &= \frac{1}{2(n+m)} \sin[(n+m)\gamma] \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2(n-m)} \sin[(n-m)\gamma] \Big|_0^{\pi} = 0 \\ \text{y si } n = m : & \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [\cos(n\gamma + m\gamma) + \cos(n\gamma - m\gamma)] d\gamma = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [\cos(2n\gamma) + 1] d\gamma = \frac{1}{4n} \sin(2n\gamma) \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2} \gamma \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (22)$$

vemos que, por lo tanto, se trata de una sucesión ortogonal, es la denominada *Sucesión de Tchebysheff*

Tomemos ahora el espacio de señales de banda limitada

Sea $x(t)$ una señal cuyo espectro $X(\omega)=0 \quad \forall \omega: |\omega|>\omega_0$

y consideremos la sucesión:

$$\varphi_n(t) = \frac{\sqrt{\omega_0}}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_0 t}{\pi} - n\right) \quad (23)$$

entonces si calculamos el producto hermítico entre dos señales $\varphi_n(t)$ y $\varphi_m(t)$ genéricas:

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) \cdot \varphi_m(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{\omega_0}}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_0 t}{\pi} - n\right) \cdot \frac{\sqrt{\omega_0}}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_0 t}{\pi} - m\right) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\omega_0}} e^{-j\omega n\pi/\omega_0} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\omega_0}} e^{j\omega m\pi/\omega_0} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\omega_0} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} e^{-j\omega\pi(m-n)/\omega_0} \cdot d\omega \quad \text{si } n \neq m \\ &= \frac{1}{j2\pi(n-m)} e^{-j\omega\pi(m-n)/\omega_0} \Big|_{-\omega_0}^{\omega_0} = 0 \\ \text{y si } n = m: & \frac{1}{2\omega_0} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} e^{-j\omega\pi(n-m)/\omega_0} \cdot d\omega = 1 \end{aligned} \quad (24)$$

Podemos ver por lo tanto, que se trata de un SON

Nota: por definición, $\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ (25) es conocida como *función de muestreo*

Calculamos ahora los coeficientes necesarios para expresar a $x(t)$ como combinación lineal de los $\varphi_n(t)$:

$$\begin{aligned}
c_n &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \phi_n(t)^* dt = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} X(\omega) \cdot \phi_n(\omega)^* d\omega = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} X(\omega) \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\omega_0}} e^{j\omega n \pi / \omega_0} d\omega = \quad (26) \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\omega_0}} x\left(\frac{n\pi}{\omega_0}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{\omega_0}} x\left(\frac{nT_0}{2}\right)
\end{aligned}$$

Es decir que los escalares resultan ser justamente las muestras de la señal tomadas a intervalos $T_0/2$ (*Teorema del Muestreo*)

Así, se podría escribir la señal $x(t)$ como:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{nT_0}{2}\right) \text{sinc}\left(\frac{\omega_0 t}{\pi} - n\right) \quad (27)$$

2.9 Serie Exponencial de Fourier

Si consideráramos el caso donde el sistema ortonormal está formado por exponenciales complejas, obtenemos la denominada *Serie Exponencial de Fourier*.

Tomemos el espacio de las señales periódicas, y sea $f(t)$ una dada señal de dicho espacio. Entonces:

La sucesión de funciones $\{ e^{j\omega_0 n t}, n \in \mathbb{Z} \}$ verifica la siguiente propiedad:

$$\int_T e^{j\omega_0 n t} \cdot [e^{j\omega_0 m t}]^* dt = \begin{cases} T, & \forall n \neq m \\ 0, & n = m \end{cases} \quad (28)$$

siendo:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (29) \quad , \omega_0: \text{pulsación angular fundamental}$$

$n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}$

j : unidad imaginaria

$\omega = 2\pi f$ (30) , donde f representa la frecuencia medida en Hertz (Hz)

t : tiempo en segundos

Podemos observar entonces que la sucesión de funciones mencionada es un *Sistema Ortogonal* (SOG). Es decir que el producto interior sobre un período, de dos señales exponenciales complejas distintas, cuyas frecuencias respectivas son múltiplos de una dada frecuencia fundamental, es cero.

Por lo tanto estas señales exponenciales complejas, también llamadas armónicos fundamentales, podrían constituir una base en el espacio de funciones periódicas (de dimensión infinita) y así permitir obtener cualquier función periódica como combinación lineal de dichos armónicos.

En base a esta idea surge la *Serie Exponencial de Fourier*:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-jw_0 nt} dt \quad (31)$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{jw_0 nt} \quad (32)$$

estas ecuaciones nos muestran cómo obtener los escalares necesarios para escribir f(t) (periódica) en función de armónicas fundamentales.

2.10 Transformada de Fourier

Los conceptos desarrollados hasta ahora, se aplican sólo a funciones periódicas; y el problema es que en el mundo real no existen las funciones periódicas, ya que una señal, para ser periódica, debería haber existido desde siempre y seguir existiendo también eternamente, es decir desde menos hasta más infinito en el tiempo.

Ahora bien, podemos imaginar que una señal no periódica es una señal periódica con período infinito, y entonces tomar las ecuaciones anteriores y llevarlas al límite cuando el período T tiende a infinito. De este modo la sumatoria se va a convertir en una integral y las frecuencias, que antes constituían un conjunto discreto dado por $w=w_0 \cdot n$, ahora van a pertenecer al conjunto denso de los reales, representadas por w.

Esto nos conduce entonces a la *Transformada de Fourier*:

$$F(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-jw t} dt \quad (33)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega \quad (34)$$

donde se puede observar la similitud entre estas ecuaciones y las anteriores.

$F(\omega)$ es la Transformada de Fourier de $f(t)$, y es también llamado “espectro” de la misma. Podemos ver entonces que las señales de tiempo continuo están identificadas por su espectro en el dominio de las frecuencias.

El proceso correspondiente a tomar muestras de una señal de tiempo continuo a intervalos regulares, y así obtener una señal de tiempo discreto, equivale a multiplicar a la señal $x(t)$ continua por un tren de deltas de la forma:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n.T_s) \quad (35)$$

donde δ representa la función impulso o delta de Dirac, y T_s el período de muestreo.

La multiplicación en el tiempo de $x(t)$ por el tren de deltas, se corresponde en el dominio de la frecuencia, con la convolución del espectro de $x(t)$, es decir $X(\omega)$, y la transformada de Fourier del tren de deltas temporales, que es otro tren de deltas en ω .

Así, la señal temporal muestreada será: $x_p(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n.T_s) \quad (36)$

y su espectro: $X_p(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n \frac{2\pi}{T_s}) \quad (37)$

Recordemos que el producto convolución de dos señales temporales es:

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau \quad (38)$$

Puesto que la convolución de una señal con una delta del tipo: $\delta(t - t_0) \quad (39)$

implica un desplazamiento de t_0 para la señal, entonces la

convolución $X(\omega) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n \frac{2\pi}{T_s}) \quad (40)$

representará réplicas periódicas, de período $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} \quad (41)$, de $X(\omega)$

Es por esta razón que la señal $x(t)$ debe estar limitada en banda, de modo tal que la máxima frecuencia presente en ella sea como máximo la mitad de la frecuencia de muestreo para evitar el *solapamiento o aliasing*.

Esto es:

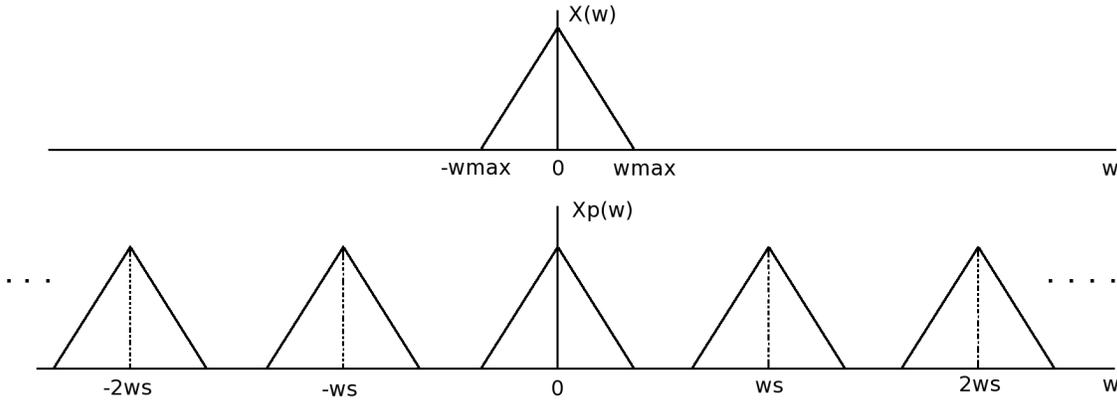


fig. 2

$$\omega_{max} \leq \frac{\omega_s}{2} \quad (42)$$

que es precisamente lo que indica el teorema del muestreo.

El espectro de la figura es genérico, sin embargo para cualquier señal real, el espectro tiene módulo par y argumento (fase) impar.

2.11 Serie y Transformada de Fourier en tiempo discreto

Si la señal fuera de tiempo discreto entonces, procediendo de manera similar a lo visto anteriormente, podríamos escribir, para el caso de una función periódica:

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \quad (43)$$

que representan los coeficientes de la serie exponencial de fourier para tiempo discreto.

Observar que en el caso discreto se trata de una suma finita de términos, ya que la exponencial compleja en el discreto es periódica con respecto tanto al tiempo como a la frecuencia.

El desarrollo anterior permite escribir la secuencia $x[n]$ como combinación lineal de los armónicos puros complejos según:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \quad (44)$$

Si se tratara de una señal no periódica, entonces podemos escribir la transformada de Fourier de tiempo discreto:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot e^{-j\Omega n} \quad (45)$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) \cdot e^{j\Omega n} d\Omega \quad (46)$$

Para una señal que comienza y termina (es decir de duración finita), podemos siempre construir otra señal que sea periódica y donde la señal original de duración finita sea igual a un período de dicha señal periódica.

Así:

$$\forall n : 0 \leq n \leq N-1, x[n] = x_1[n] \quad (47)$$

Pero entonces, por ser periódica, $x[n]$ va a tener una cantidad finita de términos de exponenciales armónicas complejas (igual a la cantidad de muestras de la señal), entonces toda la información de la señal va a estar contenida en su espectro.

Se define entonces la *Transformada Rápida de Fourier* FFT, según:

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \quad \text{con } k=0 \dots N-1 \quad (48)$$

y su correspondiente antitransformada IFFT:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \quad \text{con } n=0 \dots N-1 \quad (49)$$

Se puede observar que es posible interpretar la FFT como una transformación lineal entre dos espacios vectoriales de dimensión N , y materializar dicha transformación lineal mediante la matriz M asociada a dicha transformación.

Así, desde el punto de vista matricial, sería:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}1} & e^{-j\frac{2\pi}{N}2} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)1} \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}2} & e^{-j\frac{2\pi}{N}4} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)} & e^{-j\frac{2\pi}{N}2(N-1)} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$x = \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \dots \\ x[N-1] \end{bmatrix} \quad (51) \quad \text{FFT}(x) = X = \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ \dots \\ X(N-1) \end{bmatrix} \quad (52)$$

y se verifica que: $X = M \cdot x$ (53)

El espectro en tiempo discreto es siempre periódico (puesto que las señales de tiempo discreto se pueden imaginar como muestras de una señal de tiempo continuo), y su período es 2π .

Por lo tanto, si a una señal de tiempo continuo la muestreamos y luego le aplicamos la FFT, vamos a tener su contenido espectral, y con él, toda la información de dicha señal.

El proceso de muestreo y cuantización tiene lugar en la placa de sonido de una computadora, donde a partir de una señal analógica se generan muestras regulares al ritmo de la frecuencia de muestreo (por ej. 44100 Hz).

3. Aplicación del modelo

Una onda *poliarmónica* es una señal compuesta por una sumatoria de armónicos fundamentales (ya sea descriptos por senos, cosenos o exponenciales complejas), de modo

tal que todas las frecuencias involucradas son múltiplos de una frecuencia llamada fundamental.

Así, en el caso mas general, las ondas poliarmónicas de tensión y de corriente, se pueden escribir como:

$$v(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \sin(w_0 n t + \alpha_n) \quad (54)$$

$$i(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} i_n \sin(w_0 n t + \beta_n) \quad (55)$$

además, la potencia activa para una señal periódica de período T, se define como:

$$P = \frac{1}{T} \int_T v(t) \cdot i(t) dt \quad (56)$$

entonces, si reemplazamos por las expresiones anteriores y desarrollamos, se obtiene:

$$P = v_0 i_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \cdot i_n \cdot \cos \phi_n \quad (57)$$

Φ_n es la diferencia entre las fases de tensión y corriente α_n y β_n

Cuando una tensión poliarmónica se aplica a un medio lineal, entonces habrá una corriente poliarmónica que contendrá las mismas frecuencias presentes en la onda de tensión y donde el peso de cada armónico será proporcional a la tensión de la frecuencia correspondiente y con un defasaje según indique el módulo y ángulo de la *impedancia compleja* Z_n .

Es decir que para cada frecuencia habrá un comportamiento diferente en función de la impedancia correspondiente a esa frecuencia, según la relación:

$$I_n = \frac{V_n}{Z_n} \quad (58)$$

donde I_n , V_n y Z_n son los valores de corriente, tensión e impedancia en el campo complejo. Esto, desde luego, es considerando régimen transitorio.

Si el medio fuera alineal, entonces se obtendría una poliarmónica de corriente que tendría frecuencias adicionales que no existen en la onda de tensión, debido a la intermodulación que genera productos cruzados, y por lo tanto suma y diferencia de las frecuencias existentes.

El caso que nos interesa, es aquel en el que la onda de tensión es un armónico puro, ya que la tensión domiciliar es senoidal con valor eficaz de 220 v y prácticamente es despreciable el aporte de armónicos superiores. Debido a los elementos alineales que hubiera en la red, la corriente será en el caso más general, una poliarmónica.

En el siguiente gráfico (en función del tiempo) observamos esta situación, donde hay una tensión senoidal y una corriente con fuerte contenido de tercer y quinto armónico:

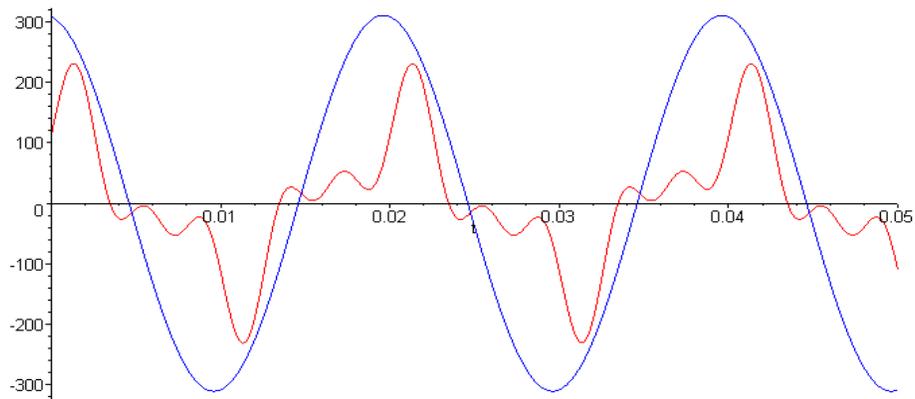


fig. 3

y los espectros respectivos (en función de la frecuencia) de tensión y corriente son:

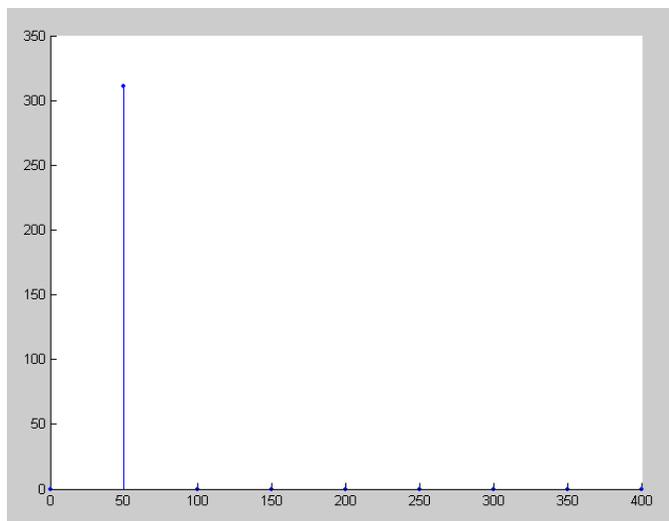


fig. 4

Tensión en función de la frecuencia

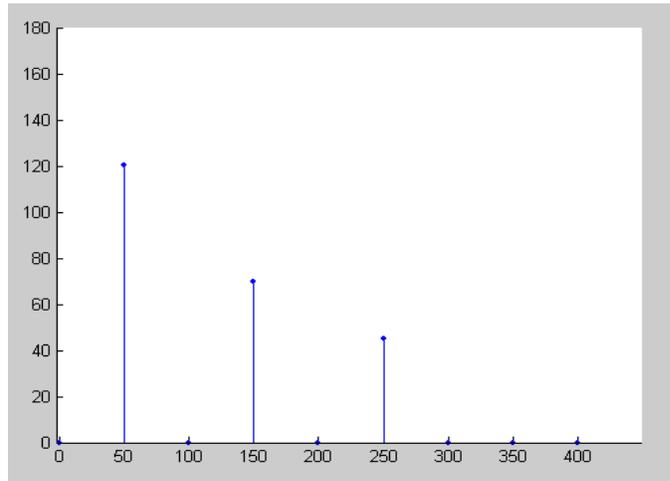


fig. 5

Corriente en función de la frecuencia

En esta situación, la potencia activa consumida por un dispositivo alimentado con dicha tensión, será:

$$P = \frac{1}{2} v_1 \cdot i_1 \cdot \cos \phi_1 \quad (59)$$

pues en la ecuación (57) sólo queda el término correspondiente a 50 Hz (que es el de la frecuencia fundamental) debido a que todos los demás coeficientes de tensión a otras frecuencias valen cero.

Teniendo en cuenta que v_1 e i_1 son valores pico, y que el *valor eficaz* es el *valor pico* dividido por $\sqrt{2}$, entonces llamando $\phi = \phi_1$, la potencia activa consumida puede escribirse como:

$$P = V_{ef} I_{ef} \cos \phi \quad (60)$$

Entonces, para conocer la potencia es necesario el valor eficaz de corriente correspondiente al armónico de 50 Hz y el coseno del ángulo entre tensión y corriente para esa frecuencia. Esta información nos permitirá obtener la potencia activa.

Pero por otra parte, según vimos anteriormente, el peso de cada armónico, está dado por el módulo del coeficiente de la serie de Fourier o la FFT para esa frecuencia, y la fase relativa entre los coeficientes de los armónicos de 50 Hz para las FFT de tensión y corriente, nos dan precisamente el ángulo ϕ .

Esto significa que mediante la FFT de tensión y de corriente, tomadas a intervalos regulares, podemos conocer la potencia media consumida.

Para obtener muestras de la tensión y de la corriente, podemos utilizar el principio del transformador, mediante el esquema en vacío (para la tensión) y el esquema en corto circuito (para la corriente).

Finalmente estas muestras se ingresan en cada canal de la placa de sonido, y mediante un programa se procesan en tiempo real obteniéndose la potencia activa consumida en cada momento.

4. Referencias

Oppenheim, Alan V. y Willsky, Alan S y Nawab, S. Hamid. Señales y Sistemas. 2a ed. México: Prentice Hall

Papoulis. The Fourier integral and its applications. Mc Graw-Hill (1962)

Spiegel, M.R. Análisis de Fourier. Mc Graw-Hill (1976).

Bracewell. The Fourier Transform and its applications. McGraw-Hill. Int., 1986

Proakis, John G. & Manolakis, Dimitris G. (1998): Tratamiento digital de señales Principios, algoritmos, y aplicaciones , Tercera Edición, Prentice Hall, Madrid

Oppenheim, A.V. & Schafer, R.W. (1989) : Discrete Time Signal Processing, Prentice Hall, New Jersey.

Brigham. The Fast Fourier and its applications. Ed. Prentice-Hall, Exeter 1988