DECISIONES DE INVERSION Y ABANDONO DE INVERSIONES EN CONTEXTOS DE AGREGACIÓN IMPERFECTA DE INFORMACIÓN

Jose Pablo Dapena*
jd@cema.edu.ar
UNIVERSIDAD DEL CEMA

La tradicional regla marshalliana de inversión (o abandono) cuando un activo vale mas (menos) que una inversión alternativa es modificada en situaciones de incertidumbre e irreversibilidad, generando un componente de opción. Adicionalmente, la interacción de varios participantes en una economía propietarios de oportunidades de inversión (o abandono) puede dar origen con información imperfecta y asimétrica a cascadas informacionales o comportamientos de manada, con potenciales efectos de sobre o subinversión en un caso, y abandono tardío o prematuro en el otro, dado que el set individual de información es inferido a partir de las decisiones de inversión o abandono efectivamente manifestadas. En el presente artículo se desarrolla un modelo que captura esos efectos dando lugar a consideraciones acerca del grado de dispersión de la información, y del número de participantes de la economía.

JEL: G00, O16, F36.
Palabras claves: opciones reales, mercado de capitales, inversión, agregación.

---

*Agradezco los comentarios vertidos en la presentación durante la XL Reunión Anual de la AAEP. Las opiniones presentadas en este trabajo pertenecen al autor y no reflejan necesariamente las de la Universidad del CEMA. Todos los errores son de mi responsabilidad.

1 Introducción

La regla tradicional marshalliana de inversión plantea invertir si el valor V generado por una inversión es mayor a su costo alternativo I. A los efectos de la determinación del valor V, en general se utiliza el método de valuación a través de descontar el flujo de fondos esperado a través de una tasa de interés que refleje apropiadamente la clase de riesgo del activo subyacente. Sin embargo, se deben tener en cuenta las consideraciones expuestas por Dixit y Pyndick (1994) relativas a la existencia de incertidumbre en los valores V e irreversibilidad de las inversiones[1]. Los mismos asocian la decisión de inversión a un derecho de compra (call) exponiendo como la incertidumbre y la irreversibilidad pueden afectar reglas de inversiones consideradas como garantizadas, cuando se incorpora la dimensión de temporalidad a la decisión de invertir o no. Myers (1977) es el primero en notar en su análisis que toda firma está compuesta por dos tipos de activos o capital, capital instalado y opciones de crecimiento, que se asemejan está últimas a opciones de compra (calls) sobre el valor de flujos de fondos futuros. Mc Donald y Siegel (1984, 1985 y 1986) desarrollan trabajos donde exponen similitudes entre las opciones financieras y las inversiones en activos reales (tales como opciones de crecimiento, opciones de espera y opciones de abandono, que se asemejan a derechos de compra los dos primero, y a un derecho de venta en el último caso). Mas recientemente, esta corriente de la literatura ha sido alimentada con trabajos de por ejemplo Trigeorgis (1988, 1997), Kulatilaka (1992, 1995ª) entre otros, a los que se suman nuevas vías de investigación, tales como aplicaciones en teoría de juegos por Grenadier (2000) y en teoría organizacional por Kulatilaka (2001).
Desde otra línea de investigación, surge literatura acerca de "cascadas informacionales" y modelos de agregación de información y aprendizaje social asociados a conceptos tales como economía de conductas y "comportamientos de manada", donde los agentes poseen información asimétrica e imperfecta, y aprenden acerca de la verdadera naturaleza de los eventos cotejando su set de información con el set que surge del comportamiento del resto de los agentes. Estos temas han sido tratados por Banerjee (1992), Ellison y Fudenberg (1993), Caplin y Leahy (1994) y Gale (1996) entre otros.
El objetivo del presente trabajo es de generar un aporte al estudio de los mecanismos bajo los cuales se toman decisiones de inversión, utilizando herramientas de opciones reales e introduciendo conceptos de observación imperfecta de precios originados en entornos de agregación de información privada.
Como fuese mencionado, la metodología de opciones reales utiliza herramientas de la teoría de opciones financieras[2] aplicadas al análisis de inversiones de capital en el contexto de negocios de la economía real. Sin embargo, mientras que en el mundo de las opciones financieras el valor de los activos subyacentes a las opciones es observable en los mercados a través de su cotización pública de precios, en el mundo de las opciones reales dicho valor puede ser objeto de estimaciones privadas y por ende estar sujeto a errores de estimación. En este contexto, un agente puede estimar su valor en base a información privada y en base también a las decisiones susceptibles de ser observadas que toman otros agentes, quienes a través de las mismas distribuyen su información privada. Este "ruido" dentro del análisis privado de las inversiones puede dar lugar a la existencia de desvíos respecto al "timing" óptimo en las decisiones de inversión o eventual abandono. Mas aún, mercados de capitales con subdesarrollo en instrumentos de participación en el capital (equity) pueden acentuar dicho problema debido a la falta de difusión de información con respecto a los valores de los activos financieros[3].

[1] Para una explicación ver Dapena (2004a) en anexo B del capítulo II.
[2] Black y Sholes (1973) y de Merton (1973) derivan una fórmula cerrada para valuar (bajo ciertas condiciones) activos con características de opciones financieras. Este trabajo es complementado con el aporte de Cox, Ross y Rubinstein (1979) sobre metodología de valuación en entornos neutrales al riesgo, originadores de una extensa literatura al respecto.
[3] De hecho el desarrollo de mercados conlleva a que los precios reflejen adecuadamente la información prevaleciente y las expectativas.

La línea de trabajo de este capítulo se basa en el modelo de Grenadier (1999) sobre externalidades informativas y liberación de información privada a través de las decisiones de inversión y de Caplin y Leahy (1994) respecto de comportamientos de manada en decisiones de inversión (incorporando como decisión las correspondientes a abandonos de inversiones). El objeto de estudio apunta a relajar el supuesto de conocimiento simétrico de valores de activos subyacentes, sobretodo en el contexto de mercados de capitales subdesarrollados, en lo referente a decisiones de inversión, hecho que dificulta la difusión de información entre sus participantes y por ende la agregación de la misma y el aprendizaje social.

2 La propuesta a desarrollar

El proceso de valuación de un activo en pos de una decisión de inversión es en sí subjetivo y eventualmente sujeto a errores de percepción; el hecho que existan diferentes percepciones de precios no indica necesariamente que los mismos son erróneos, sino que la percepción de valor puede ser diferente en cada caso. En el proceso individual de valuación, no existe un único valor, porque aún cuando existiese, las condiciones cambiantes y el arribo de nueva información lo haría cambiar inmediatamente, por lo que es un proceso de estimación continua. La tarea de valuación de activos se puede asimilar entonces a un proceso de inferencia estadística de estimación del verdadero nivel de un parámetro desconocido (el parámetro de valor V) a través de la utilización de técnicas y herramientas de valuación, obteniendo una estimación $V_i = \theta_i V$ del parámetro, donde θ_i refleja la percepción privada para el inversor i[4]. El hecho que V_i sea en sí mismo una variable sujeta a percepción privada permite pensar que el inversor i asociará al mismo un intervalo donde él estima se encontrará ubicado con grandes probabilidades el verdadero valor V. Así, se podrá decir por ejemplo que el valor estimado de un activo V para el agente i es de θ_i V_i, fluctuando con cierta dosis de confianza en un intervalo que va desde V_{min} hasta V_{max} (lo que puede ser asociado a precios de reserva en el mercado, máximos a pagar en caso de compras o mínimos a recibir en casos de ventas), pero que deja afuera otros valores con un nivel de confianza determinado. Es probable que el inversor i no acierte en la determnación del verdadero valor de θ, entonces la pregunta a hacerse es cuan equivocado puede estar y en que dirección. El concepto de intervalo y de precios máximos y mínimos es en consecuencia de vital importancia frente a esta situación. Asimismo, ese estimador de valor es una variable subjetiva, dado que está atado a las percepciones de valor del agente que está estimando. De esta manera, la percepción de valor de unos puede ser diferente de la percepción que tiene otro agente, lo que da lugar a que las estimaciones sean subjetivas y no exista un potencial "verdadero" valor.
Respecto de las decisiones de inversión que motiva esta estimación de valor, ya se ha expuesto como la misma puede asociarse a una opción de compra. En modelos estándar de opciones se asume que el ejercicio de las mismas es simultáneo y no informativo. Se asume que los agentes se encuentran en perfecto conocimiento de los parámetros de la opción, y en consecuencia pueden decidir sobre su correcto ejercicio o no[5]. Sin embargo, existen muchas situaciones en opciones reales donde los agentes se encuentran con conocimiento imperfecto y/o privado de cierta información relevante, es decir que la estimación del valor que hacen del activo subyacente está sujeta a algún tipo de error en el sentido expresado previamente. Esto se puede originar en el hecho que los enfoques de valuación trabajan

[4] Esta tarea de valuación adopta mucha intuición de elementos de estadística ya que valuar implica estimar el valor de un parámetro desconocido (el valor que se está buscando) a partir de información parcial sin la posibilidad de contar con toda la información posible (por ser muy costoso o por ser imposible). Es una tarea de inferencia, donde a partir de ciertos datos y técnicas, se busca llegar al mejor estimador de valor.
[5] En opciones financieras el valor del activo subyacente es perfectamente observable si el mismo tiene cotización de mercado de capitales, no dejando dudas acerca de si la opción se encuentra "in the money" o " out of the money".

sobre ciertos supuestos de liquidez de mercado, posibilidad de replicar retornos de activos y portafolios de inversión, inexistencia de costos de transacción, divisibilidad de la inversión y posibilidad de vender en "corto" algún activo. Estos supuestos son mas difíciles de sostener en el contexto de inversiones en activos reales, lo que puede dar lugar a que los valores que resultan de la aplicación de los métodos usuales de valuación puedan tener una mayor dispersión o grado de volatilidad asociada (son menos "exactos"). Inversiones tales como innovación tecnológica, desarrollo de marca, sistemas de distribución, inversiones inmobiliarias, no siempre tienen un mercado líquido donde puedan ser comercializados bajo los supuesto mencionados.
En ese contexto de información imperfecta, los inversores pueden reaccionar calibrando sus expectativas en función del tipo de decisiones que adoptan otros agentes operando en similar mercado. De hecho, existirán agentes que se encuentren mejor informados, y agentes que se encuentren una situación relativa desventajosa. Esto sucede en general en todos los ámbitos donde se deben tomar decisiones de inversión o asignación de recursos: cuando la confianza en la información privada es escasa, los agentes recurren a la observación del comportamiento de otros agentes. Este tipo de situaciones es perfectamente entendible en el ámbito de corridas bancarias donde el conocimiento de la verdadera solvencia de un banco es imperfecto, y se sigue una conducta de imitación de agentes supuestamente "mejor informados" -o quizá impulsivos-; en el ámbito de corridas cambiarias, donde pueden surgir dudas sobre el valor fundamental del tipo de cambio, y en consecuencia se copia la estrategia de otros agentes. Las decisiones de los agentes actúan como señales al mercado sobre el carácter de la información privada con la que cuentan (o carecen de). Esta conducta puede ser asociada en algunas situaciones a comportamientos de manada ("herd behaviour") y cascadas de información, donde un agente ignora su información privada y copia en sus decisiones a otros agentes. En el contexto de opciones reales se asocia estas conductas cuando los agentes tenedores de opciones reales ejercen las mismas independientemente del valor subjetivo que le asignan a sus estimadores. A diferencia de las opciones financieras, donde el valor de los parámetros tiene elementos de estimación mas precisos (hasta el punto que los parámetros de precio de ejercicio y precio actual del activo subyacente son perfectamente observados a través del mercado, quedando dudas principalmente con respecto a la volatilidad del mismo), las opciones reales se mueven en escenarios de inversión real donde el cálculo de las estimaciones del valor de los parámetros se hace mas complicada y las conductas asimilables a cascadas informacionales son mas probables. Este tipo de conductas puede explicar de manera mas eficaz situaciones de sobreinversión o de subinversión, o de abandono prematuro o tardío.

3 Modelo de análisis

Como ya fuese mencionado, los aspectos iniciales del modelo a desarrollar están basados en los trabajos de Gale (1996) y Grenadier (1999). Expandiendo sobre estos modelos, se presentará un agente representativo poseyendo un derecho de inversión (equivalente a una opción de compra), quien debe decidir si invierte o no, y en que momento. Este agente tiene dos fuentes de información, su información privada que reconoce como parcial e incompleta, y la que surge de mercado, agregador del conjunto de decisiones del resto de los agentes, quienes vuelcan su información privada al mercado a través de sus actos. El problema con el uso de las opciones reales es que usualmente no existe (a diferencia con las opciones financieras) un mercado transparente para el valor del activo subyacente, y en consecuencia su verdadero valor puede estar sujeto a error de estimación. En consecuencia el ejercicio privado de la decisión de inversión (o eventualmente abandono) puede dar lugar a desvíos con respecto al óptimo en el agregado, introduciendo conductas tales como "excesiva espera" o "conducta apresurada"; los agentes pueden tener la voluntad de esperar a observar las decisiones de los otros antes de tomar sus propias decisiones, considerando que las decisiones liberan información privada al mercado.

Inicialmente se tiene un modelo de n agentes neutrales al riesgo[6] indexados a través de la variable i, con $n \geq 2$ donde dicho número de participantes es de común conocimiento por todos. Cada agente posee una opción de compra idéntica sobre cierto activo, estando los mismos en condiciones de ejercer la opción en cualquier momento (la opción es de tipo americana y perpetua, y las decisiones se toman en tiempo continuo). Sin embargo, el repago exacto como consecuencia del ejercicio de la opción no es completamente conocido para los agentes, ya que el mismo depende de la información privada que pose cada uno. La estrategia de ejercicio óptima de cada agente será entonces contingente no solo en el signo privado, sino también en base a la observación de las acciones de los otros agentes y en el nivel de una variable estado a definir.
En situaciones estándar de opciones, el ejercicio de las mismas retorna la diferencia entre el precio del activo subyacente y el precio de ejercicio. Denotando el precio del activo subyacente por V_t y el precio de ejercicio por I, el repago es típicamente V_t - I. El presente modelo difiere de esta situación estándar en el sentido que el repago incluye también una variable aleatoria no observada denotada por θ, cuya realización impacta de manera plena en el repago de la opción real de inversión. El nivel de esta variable aleatoria no es conocido con el ejercicio, es decir que permanece relativamente no observable hasta que todos los agentes involucrados han ejercido su opción de inversión[7]. En particular, el repago del ejercicio de la opción será:

$$\text{Max} \; [\theta V_t - I, 0] \qquad [1]$$

A los efectos intuitivos, se puede asociar V_t al valor "promedio" de los activos sobre los cuales se poseen opciones reales de inversión[8], siendo ese valor promedio aplicado en cada caso en función de situaciones particulares que atañen a cada activo del mercado.
Esta variable de "promedio" V_t se supone que sigue un proceso estocástico de dinámica browniana, de la forma:

$$dV = \alpha V dt + \sigma V dz \qquad [2]$$

donde α es la tasa de apreciación condicional instantánea de V por unidad de tiempo (puede ser descompuesta en el retorno esperado del activo V y su tasa de dividendos δ), σ es la desviación estándar instantánea por unidad de tiempo, y dz es el incremento de un proceso estándar de Wiener. En el momento t=0, el valor de agregación de señales θ es desconocido para los agentes. La variable θ se asume conformada por una constante mas una suma de n señales independientes de la forma:

$$\theta = \mu + S_1 + S_2 + \ldots + S_n \qquad [3]$$

donde μ es el valor esperado de θ y S_i son variables independientes con media cero y varianza $V(S_i)>0$ y la información poseída por todos se agrega creando la variable θ. Inicialmente cada agente posee información privada sobre θ a través de su señal S_i y conoce la distribución de señales; cada agente tiene una expectativa del verdadero valor de θ en base a su señal privada y en base a su conocimiento de la distribución de señales, y va modificando dicha expectativa en base a las decisiones del resto de los agentes. Se asume que la información disponible para el agente está dada por su propia señal mas las inferencias que hace sobre las señales del resto de los participantes a partir de

[6] El supuesto de neutralidad al riesgo puede ser fácilmente relajado sin alterar los resultados.
[7] Este supuesto es mas apropiado para mercados mas privados y menos desarrollados, donde los costos de transacción, las fricciones y "ruidos" en general perturban el adecuado funcionamiento del mercado como transportador y difusor de información.
[8] Podría ser por ejemplo el precio "promedio" del metro cuadrado de edificación en el mercado inmobiliario, puede ser el ratio de mercado de precios de activos respecto de las ganancias ("price earning"), etc.. Si el mercado utilizase comparables o valuación relativa en su evaluación de valor, podríamos decir que la variable V_t refleja el valor medio del comparable.

observaciones sobre las acciones realizadas por los mismos, mas el valor de la variable estado o promedio de mercado en cada momento del tiempo. El potencial de un cascada está dado por el carácter imperfecto de la señal observada a través de las acciones. Si cada agente revelase la naturaleza de su signo, el problema sería de agregación y una cascada nunca surgiría. Esto es atractivo desde el punto de vista conceptual y teórico (una situación donde todos los agentes colaboran revelando su señal), pero no se verifica en muchas situaciones de mercados. En general en los mercados los agentes tienen incentivos a mantener de manera privada su información a la vez que tratan de inferir la de sus competidores[9].
El contexto donde debe tomar las decisiones el agentes es de conocimiento únicamente de tres variables:

- su propia señal,
- el conocimiento de la decisión de invertir o no tomada por los otros participantes y la inferencia que se hace de ello,
- el valor del activo subyacente (definido como variable estado) en cada momento del tiempo.
-

En esta primera instancia, la señal S_i que posee cada participante i es de conocimiento privado, y es revelada parcialmente a través de su decisión. Se asumen un valor mínimo para $S_i= S_{min} < 0$ y un valor máximo $S_i= S_{max} >0$ común para todos los participantes. Cada agente conoce el valor de su propia señal, pero no el de los demás[10]; los agentes desconocen aún el valor absoluto de la señal del resto de los agentes, e infieren el valor de las señales de los demás agentes a través de su observación de las decisiones de los mismos, sin tener conocimiento acerca de cual es el agente con la señal mas alta hasta que las decisiones de inversión se van conociendo en el mercado. La diferencia con los modelos tratados en la literatura radica entonces en que el agente observa la decisión de inversión, pero esto no le permite cuantificar perfectamente la señal del agente que ya ha ejercido; solamente le permite inferir que la misma se encuentra en cierto rango de valores. El proceso estocástico de la variable V definido en [2] asegura que existirá un momento T en el que para un agente será optimo invertir en su proyecto de inversión, revelando su información al mercado, teniendo el resto del mercado información parcial sobre el valor. El hecho que los agentes no sepan quien tiene el valor S_i absoluto mas grande no es un supuesto restrictivo; fácilmente se puede pensar que existen agentes mas optimistas (con mayores valores de S_i) y menos optimistas. El aspecto saliente radica que el resto de los agentes puede saber que un agente es el mas optimista a través de observar que ha ejercido su opción de inversión, pero no sabe el valor absoluto de su signo, por lo que lo en su proceso de revisión del valor esperado de θ infiere la señal del otro participante en un intervalo entre el valor mínimo S_{min} y el propio (en el caso que sea el siguiente mejor informado) si el agente mas optimista no ejerce, o entre el valor máximo S_{max} y el propio si el agente mas optimista ejerce su oportunidad de inversión.
El proceso de decisión de inversión se convierte entonces en una relación costo- beneficio entre la decisión de esperar para que la información se vuelque al mercado (e.g. esperar que otros inviertan) e invertir; el proceso estocástico previsto en [2] y la característica

[9] El supuesto que la transmisión de información se produce por acciones y no por palabras es bastante común en la literatura. Si los agentes fuesen creídos por sus palabras podrían darse situaciones donde hubiesen incentivos para dar pronunciamientos erróneos. Este supuesto conlleva que solamente las acciones son creíbles y que mecanismos de comunicación tales como despachos de prensa y revelación de información no son creíbles. En bastante situaciones, los inversores tienen fuertes incentivos a confundir a sus pares, provocando que la revelación de información no sea creíble. Este comportamiento puede originarse por varias causas; los inversores pueden ser compensados por su performance relativa al resto de inversores, pueden querer dañar a sus competidores para que no representen una amenaza, o pueden querer apropiarse de beneficios obtenidos por externalidades de aglomeración.
[10] Esta característica del modelo a desarrollar constituye una innovación con respecto a Grenadier (1999); en dicho trabajo, cada agente conoce su señal, que puede adoptar dos valores ε_i positivo o negativo con iguales probabilidades, a su vez cada agente conoce el valor absoluto de la señal de los otros agentes, pero desconoce solamente si su realización es positiva o negativa).

establecida en [3] permite que aún cuando todos los agentes tengan señales negativas, eventualmente V_t alcanzará un punto tal que convendrá invertir. El modelo implica que los agentes no saben el valor absoluto de los signos del resto, pero lo infieren con valores estimados en cierto intervalo; el valor informativo de la decisión de inversión (o de no invertir en el caso de alcanzarse valores críticos de V_t) esta dado porque reduce el rango de posibles signos que un agente infiere sobre el valor de los otros.

3.1 Ejercicio de decisiones de inversión con información perfecta

Es útil a los efectos de evaluar el impacto de la agregación de información exponer el desarrollo del óptimo de inversión bajo condiciones de común conocimiento de los signos. Si cada agente hiciese público su signo, todos los agentes podrían agregar la información antes de tomar ninguna decisión, sacar conclusiones y ejercer de manera simultánea sus derechos sobre sus proyectos de inversión en el momento que V_t igualase un valor óptimo $V^*(\theta)$. Denotando $W_i(V;\theta)$ al valor de la opción de inversión poseída por cada agente en un mundo donde θ es de público conocimiento (a partir de una agregación de información coordinada por los propios agentes antes de realizar sus inversiones), $W(V;\theta)$ debe resolver la siguiente ecuación diferencial de equilibrio:

$$\tfrac{1}{2} W''(V)\, \sigma^2 V^2 + (r - \delta)\, VW'(V) - r W = 0 \qquad [4]$$

donde haciendo uso que el inversor es neutral al riesgo se tiene que $r = \alpha + \delta$, entonces:

$$\tfrac{1}{2} W''(V)\, \sigma^2 V^2 + \alpha V W'(V) - r W = 0 \qquad [5]$$

Esta ecuación debe resolverse sujeta a condiciones de límite apropiadas. Estas condiciones de límite sirven para asegurar que la estrategia óptima es elegida:

$$W(V^*) = \theta V^*(\theta) - I \qquad [6a]$$
$$W'(V^*) = \theta \qquad [6b]$$

La primera condición es de "value matching", estableciendo que al momento del ejercicio de la opción, el repago es $\theta V – I$. La segunda es de "smooth pasting" o "high contact", asegura que el valor de ejercicio V^* se elige para maximizar el valor de la opción[11]. La solución para el valor de la opción $W(V)$ y el valor límite de inversión V^* puede ser expresada entonces como:

$$W(V;\theta) = \begin{cases} (I/(\beta-1))^{1-\beta}\, (\theta/\beta)^{\beta}\, V^{\beta} & \text{para } V < V^*(\theta) \quad [7a] \\ \theta V - I & \text{para } V \geq V^*(\theta) \quad [7b] \end{cases}$$

donde

$$V^*(\theta) = \frac{\beta}{\beta - 1}\frac{I}{\theta} > I \qquad [8]$$

[12]

y

[11] La forma funcional de $W(V;\theta)$ se obtiene fácilmente, ver Grenadier (1999).
[12] Vemos que V debe superar bastante a I para que se invierta, debido al valor de la opción de espera.

$$\beta = \frac{-(\alpha - \sigma^2/2) + \sqrt{(\alpha - \sigma^2/2)^2 + 2r\sigma^2}}{\sigma^2} > 1 \qquad [9]$$

y donde $\alpha < r$ para asegurar convergencia. La ecuación [8] representa el valor de ejercicio $V^*(\theta)$ consistente con información plena. De esta manera todos los agentes invierten en el momento de tiempo $T^*(\theta)= \inf(t \geq 0: V(t) \geq V^*(\theta))$.

4 Ejercicio de decisiones de inversión con información parcial

En el punto anterior se obtiene que dada la dinámica [2] de la variable V_t, eventualmente en virtud de [7] y [8] se alcanza un valor definido por V* que gatilla la decisión de inversión cuando la agregación de la información es perfecta, siendo dicho valor alcanzado en un momento de tiempo T*. A continuación , se desarrollará un modelo en el que los inversores tendrán información imperfecta acerca del verdadero valor de θ. En cada momento del tiempo, su set de información contiene no solamente el valor de su propio signo, sino también la información contenida en el ejercicio (o falta de ejercicio) de los otros inversores y el valor observable por todos alcanzado por la variable "promedio" o estado Vt. Los inversores actualizaran su expectativa condicional de θ_i en el tiempo a través de la observación de las acciones de los otros inversores en un esfuerzo por estimar los valores de los signos de los mismos. Este intento de aprender de las acciones de otros determinará en gran manera el tipo estrategias óptimas de inversión en equilibrio. En el modelo estándar de información plena expuesto en la sección anterior, la estrategia óptima de inversión surge de igualar el beneficio inmediato derivado del ejercicio (valor capturado menos costo de inversión) con el valor marginal de esperar. Sin embargo, un elemento a tener en cuenta es que con información parcial, los inversores tendrán en cuenta también el beneficio derivado de esperar el ejercicio (inversión) o no de los otros inversores al decidir su estrategia de inversión optima. En la siguiente sección estas relaciones de costo beneficio se calculan explícitamente.

4 .1 Equilibrio con revelación de información

En esta sección se deriva el equilibrio para un juego de $n \geq 2$ personas. En este equilibrio los inversores tendrán en cuenta tanto su propio signo como la estimación condicional que hacen del signo del resto de los inversores a través de la revelación de información como consecuencia de sus decisiones, y del valor alcanzado en cada momento t por la variable estado V. Dada las estrategias del resto de los inversores, la estrategia de inversión de equilibrio de cada inversor será optima. Antes de derivar el conjunto de estrategias de equilibrio, es útil proponer un poco de intuición.
Los agentes conocen el valor de su señal, pero no los valores de la señales del resto de inversores; cada inversor se encuentra en posesión de información privada (su señal S_i), y del conocimiento de nivel en cada momento del tiempo de la variable estado V_t. En algún momento del tiempo la variable estado alcanza un valor crítico V^*_i para el inversor i conforme [7] y [8] y consistentes con S_i, lo cual le plantea al inversor la necesidad de tomar una decisión:

- sigue esperando ver lo que realizan el resto de los inversores,
- liquida la opción de espera e invierte.

Cada inversor tendrá un valor óptimo V^*_i asociado conforme [8], que indica al nivel en el cual liquidaría la opción e invertiría en base a su estimación de θ, en el caso de tener que decidir únicamente en base a su propia señal privada, lo cual sucede en el momento T^*_i. Dada la distribución de S_i entre sus valores máximos y mínimos, esta decisión se presentará primero para aquel agente (ahora denominado 1) que posee el nivel de señal mas alta (aún cuando no sabe que su señal es la mas alta) lo que es consistente con un nivel de V mas bajo (V^*_1) de acuerdo a [8], ya que $S_1 > S$ promedio. Sin embargo, por los aspectos de agregación de información y las dificultades de coordinación, cada inversor encuentra que el repago asociado a su inversión conforme [1] es incierto al momento de tomar la decisión, dado que desconoce el valor del resto de las señales, y evalúa esperar a observar las acciones del resto de los inversores, conforme el supuesto expuesto previamente que la transmisión de información se realiza únicamente a través de las acciones de los participantes, y no a través de sus palabras.

4.2 Equilibrio con dos agentes

Dado que la variable V sigue el proceso detallado en la ecuación [2] y dadas la señales S_i privadas de los agentes; la estrategia de inversión de cada inversor i =1,2 será contingente en:

- el valor corriente de V_t observado
- su señal S_i
- la política de ejercicio revelada por el otro agente.

El repago al momento de ejercer es $\theta^* V_t$ - I. Se asume que las señales siguen una distribución uniforme[13] en el espacio $[S_{min}, S_{max}]$ e indexadas de la siguiente manera

$$S_i \in [S_{min}, S_{max}],\ i = 1,2, \text{ con } S_{min} < 0,\ S_{max} > 0 \qquad [10]$$

dando lugar al coeficiente de agregación de información

$$\theta = \mu + S_1 + S_2 \qquad [11]$$

donde

$$\mu > S_1 + S_2 \qquad [12]$$

lo que garantiza el ejercicio de las opciones en algún momento de tiempo T finito[14].
Se denota la acción de inversión a través de la variable binaria[15]

$$x_i = 0 \text{ si el inversor i decide no invertir} \qquad [13a]$$

$$x_i = 1 \text{ si el inversor i decide invertir} \qquad (13b]$$

Cada inversor i tiene su expectativa inicial sobre la señal del otro inversor j condicional en ninguna decisión tomada, lo que es equivalente a x_j=0

$$E_i\left[S_j \big/ x_j = 0 \right] = 0 \qquad [14]$$

lo que significa que el valor esperado de θ para el inversor i es

[13] El supuesto de utilizar una distribución uniforme es para facilitar la utilización del herramental analítico, aunque se puede trabajar con otras funciones de densidad, donde los resultados serán condicionales en la función utilizada.
[14] De aquí en adelante y a los efectos únicamente de exposición, se normaliza θ en [11] de μ .
[15] Esto es un aspecto central del trabajo. La señal S_i se mueve en un continuo de valores de acuerdo a [10] pero su manifestación a través de la decisión de inversión adquiere el carácter de variable biaria, siendo x_i un indicador imperfecto de S_i y por extensión de θ.

$$E_i\left[\theta / x_j = 0\right] = S_i \qquad [15]$$

es decir el valor de su propia señal, atento que el otro inversor no ha ejercido su opción y la variable V_t no ha alcanzado ningún valor crítico.
Conforme lo ya expuesto, se indexan los inversores de acuerdo al nivel de su señal; así el inversor 1 es aquel que tiene el mayor valor S_1 (aún cuando no sabe que su signo es el mayor) y sucesivamente para el 2. La dinámica de V_t conforme [2] hará que exista un momento T^*_1 tal que V alcanza el valor óptimo V^*_1 para el inversor 1 de acuerdo a [8] y condicional en lo que sabe sobre el inversor 2, donde hasta dicho momento el valor esperado de θ es S_1 conforme a [15]. En dicho momento se produce el primer evento relevante que implica decisión: el inversor 1 se da cuenta que de ser el único en el mercado, ese sería el momento T^*_1 óptimo para invertir condicional en su estimación de θ de [15]. Sin embargo, no se encuentra solo en el mercado, lo que le hace reflexionar sobre el posible valor de la señal S_2 del inversor 2. Esto le cambia su expectativa condicional del valor de θ dado que ahora interpreta que el valor de la señal S_2 se encuentra en algún lugar entre S_{min} y S_1 (por debajo de su propia señal y por encima del mínimo) dado que observa que el otro inversor no ha invertido y le hace pensar que su nivel de señal es mas baja, siendo el nuevo valor condicional de θ para 1 igual a:

$$E_1\left[\theta / x_2 = 0\right] = S_1 + \left(\frac{S_1 + S_{min}}{2}\right) < S_1 \qquad [16]$$

esto provoca que al revisar sus expectativas sobre el valor de θ, el inversor 1 entienda que conforme a [8] debe esperar que V_t crezca aún mas para que sea óptimo invertir (la falta de inversión por parte del inversor 2 cambia su expectativa condicional). Es decir que el inversor 1 no invierte, y no revela información al mercado, debido a que la revisión de expectativas incrementa el valor crítico V^*_1 hacia el nuevo límite V^{**}_1 consistente con [16].
De la misma manera, aún cuando el signo del inversor 2 sea menor al del inversor 1, y si el este último no ha invertido aún (ya se verá bajo que condiciones se produce esto), el valor esperado inicial de θ para el inversor 2 es similar al caso anterior según [15]:

$$E_2\left[\theta / x_1 = 0\right] = S_2 \qquad [17]$$

donde, de no mediar decisión de inversión por parte del inversor 1 eventualmente llega un momento T^*_2 en el que Vt alcance un valor V^*_2 donde se revele lógico para el inversor 2 invertir conforme el nivel de su señal privada S_2, y tomando como dado que el inversor 1 no ha invertido aún (si ya ha invertido, se verán las condiciones para que esto suceda). En dicho momento, el inversor 2 (que no sabe que el inversor 1 tiene una señal mas alta), piensa que <u>SU</u> señal es la mas alta, y de manera análoga al proceso de revisión de expectativas de 1, revisa su expectativa condicional sobre θ, donde al observar falta de ejercicio por parte del inversor 1 asume que el nivel de su señal S_2 es en realidad el mas alto y en consecuencia reacciona revisando su nivel óptimo V_2^* al alza hacia V^{**}_2 de manera análoga al caso del inversor 1:

$$E_2\left[\theta / x_1 = 0\right] = S_2 + \left(\frac{S_2 + S_{min}}{2}\right) < S_2 \qquad [18]$$

donde

$$E_1\left[\theta / x_2 = 0\right] > E_2\left[\theta / x_1 = 0\right] \quad [19]$$

dado que la señal de 1 es mayor que la de 2.

La dinámica de Vt lleva a que en algún momento T^{**}_1 para determinado valor de $V=V^{**}_1$ conforme [8] sea óptimo para el inversor 1 invertir conforme la expectativa condicional revisada que tiene sobre el valor de θ según [16], tomando como dado que el inversor 2 no ha ejercicio su decisión de inversión.
Dado que según [19] el valor esperado condicional de θ es mayor para el inversor 1 que para el 2, se sigue que $V^{**}_1 < V^{**}_2$ de acuerdo a [8], por lo que el primero deberá decidir nuevamente en T^{**}_1 si invierte. Cuando $V_t=V^{**}_1$, donde θ_1 conforme [16], el mismo encuentra óptimo invertir y liberar información al mercado, en base a su información privada y su expectativa condicional sobre el valor de la señal del otro inversor.
Con respecto al inversor 2, y frente a la decisión de inversión de 1, pueden darse dos situaciones:

- que el inversor 2 haya revisado su expectativa condicional (en la no inversión de 1),
- o que no lo haya hecho todavía.

Si V_t no hubiese alcanzado el nivel crítico V^*_2 necesario para la primera revisión para 2 de expectativas condicional (en la no inversión de 1), e.g. de:

$$E_2[\theta]= S_2 \quad [20]$$

a

$$E_2\left[\theta / x_1 = 0\right] = S_2 + \left(\frac{S_2 + S_{min}}{2}\right) \quad [21]$$

significaría que el inversor 2 no alcanza el nivel crítico de V^*_2 y no alcanza a revisar su expectativa a la baja dado que la decisión de inversión por parte de 1 lo sorprende y le provee de información, llevándolo a revisar su expectativa condicional inicial según [20] al alta, de forma:

$$E_2\left[\theta / x_1 = 1\right] = S_2 + \left(\frac{S_2 + S_{max}}{2}\right) \quad [22]$$

dado que observa la acción de inversión por parte del inversor 1 entonces estima que la señal del inversor 1 se encuentra entre la propia y el máximo.
La situación alternativa (ver gráfico 1) es una en la cual el inversor 2 tiene el tiempo suficiente para revisar su expectativa a la baja, dado que V_t alcanza su valor crítico V^*_2, antes que el inversor 1 invierta, y el inversor 2 observa que el inversor 1 no ha invertido aún, lo que le hace pensar que eventualmente posee el nivel de señal S_i mas alto. Esto lo hace mas pesimista respecto al verdadero valor de θ, revisando inicialmente su expectativa condicional de S_1 a la baja, que luego es revisada hacia arriba cuando se produce el evento de ver al inversor 1 ejercer su opción de inversión:

$$E_2\left[S_1 / x_1 = 1\right] = \frac{S_2 + S_{max}}{2} \quad [23]$$

cuando observa la inversión por parte de 1, donde el valor esperado condicional de θ para el inversor 2 será:

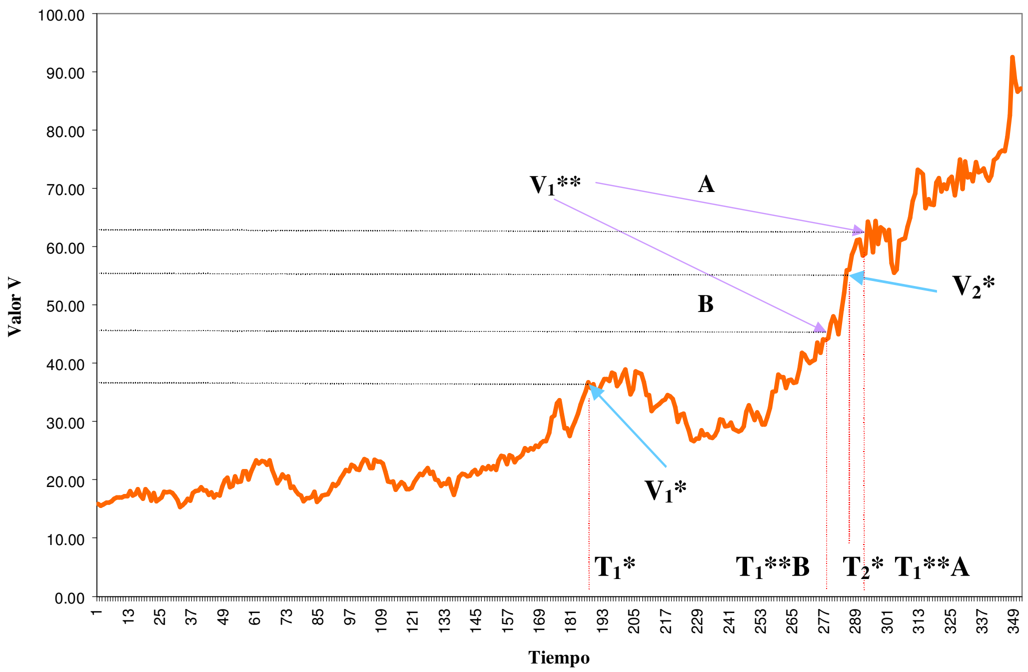
$$E_2\left[\theta / x_1 = 1\right] = S_2 + \left(\frac{S_2 + S_{max}}{2}\right) \qquad [24]$$

que es superior a la expectativa condicional de θ dada la no inversión de 1:

$$E_2\left[\theta / x_1 = 0\right] = S_2 + \left(\frac{S_2 + S_{min}}{2}\right) \qquad [25]$$

El inversor 2 se replantea su estrategia de inversión óptima conforme la revelación de información por el ejercicio de la opción de inversión por parte del inversor 1.
El siguiente gráfico permite exponer mejor la dinámica de decisiones entre los agentes inversores.

Gráfico 1 Evolución dinámica de la variable V y valores límites para decisión



Se observa del mismo que el valor límite V^*_i es alcanzado primero por el inversor 1 en el límite V^*_1 dado que su señal es la mas alta, pero su decisión de inversión solo la ejerce cuando V alcanza el valor límite V^{**}_1 consistente con su expectativa de θ replanteada según [16]; respecto al inversor, las situaciones ya expuestas se encuentran rotuladas en el gráfico como A y B, donde en A el inversor 2 acomoda su expectativa a la baja según [21] para luego frente a la decisión de inversión del inversor 1 la reacomode nuevamente conforme la ecuación [22] cuando observa que el inversor 1 ejerce su opción de inversión; y en B el inversor 1 ejerce su opción de inversión antes que el inversor tenga oportunidad de acomodar su expectativa a la baja, por lo que el inversor 2 acomoda su expectativa inicial hacia la expuesta en [22] sin reformular [21] en el interín. Previo a continuar vale la pena derivar estimar bajo que condiciones el inversor 2 (el menos optimista) tiene tiempo de revisar sus expectativa incondicional $E_2[\theta]$ a la expectativa condicional a la baja y luego (tras observar la inversión de 1) revisar esta expectativa condicional al alza; o directamente no

tiene tiempo de revisar su expectativa a la baja, ya que en un momento $t<T^*_2$ observa al inversor 1 invirtiendo lo que le permite revisar su expectativa condicional hacia arriba:
Para el inversor 2 revisar su expectativa a la baja significa cambiar en T^*_2 su estimación de θ conforme [20] y [21] ante la inexistencia de acciones de inversión por parte del otro inversor. Tomando los determinantes de la decisión por parte del inversor 1, éste invierte cuando el valor Vt alcanza un valor V^{**}_1 consistente con su nueva estimación de θ según [16].
El inversor 2 no tendrá tiempo de revisar su expectativa a la baja si el inversor 1 invierte antes que 2 llegue a su valor crítico V^*_2, lo que sucederá cuando:

$$S_2 < S_1 + \left(\frac{S_1 + S_{min}}{2}\right) \quad [26]$$

lo que lleva al inversor 2 a revisar su expectativa al alza conforme las ecuaciones [20] y [24].
De verificarse que el nivel de la señal S_2 (expectativa incondicional de θ para el inversor 2) de acuerdo a [26], el inversor 2 tiene tiempo de revisar su expectativa a la baja, y luego al observar la inversión de 1 la revisa al alza.
Existen dos puntos que merecen ser desarrollados a partir del modelo de dos inversores propuesto. El primer punto es relacionado al "timing" de la inversión, en el sentido de evaluar bajo que condiciones el primer inversor entrará antes del momento T* óptimo bajo información perfecta, y bajo que condiciones entra "después", provocando un efecto de "excesiva espera".
El segundo aspecto a desarrollar es bajo que condiciones se produce una "cascada de información" donde el ejercicio de la opción de inversión por parte del primer inversión gatilla el automático seguimiento y ejercicio de la opción de inversión por parte del segundo inversor, y bajo que condiciones el segundo inversor espera. A continuación se trata cada efecto por separado.

4.2.1 Timing de la inversión

Si no existiesen problemas de agregación de la información, en el sentido que las señales son de común conocimiento (e.g. $\theta = S_1 + S_2$, donde ambas señales son conocidas), habría un momento T* consistente con θ donde todos los inversores deciden ejercer su opción de inversión consistente con las ecuaciones [7] y [8]. El carácter privado de la señal hace que el inversor con la señal mas alta entre en el mercado primero. Esta entrada no necesariamente debe coincidir con el momento T* óptimo. Como ya fuese desarrollado, inicialmente, cuando el valor V_t alcanza cierto nivel V^*_1 en T^*_1, el inversor 1 se da cuenta que debiera invertir si considera solamente su propia señal. El hecho que el otro inversor no haya invertido le hace revisar su expectativa sobre S_2, de $E_1[S_2] = 0$ a $E_1[S_2/x_2=0] = (S_1 + S_{min})/2$, donde $E_1[S_2] > E_1[S_2/x_2=0]$ conforme el mecanismo ya descripto en el apartado anterior. Esto ya provoca el primer efecto: el inversor 1 ejerce su opción de inversión con en T^{**}_1, con posterioridad al momento T^*_1 donde debiera invertir de no ejercer inferencia sobre las decisiones de inversión efectuada por el otro agente, dada la revisión de expectativas[16]. El inversor 1 no ignora la información que surge del mercado y decide esperar con respecto a una situación donde tuviese que tomar una decisión basado únicamente en su propia señal S_1. Si ignorase al resto de los inversores, invertiría en dicho momento, pero esto se revela óptimo. Como fuese mencionado, el inversor 2 conoce S_2, mientras que el inversor 1 lo estima condicionalmente a partir de su conocimiento de la información de mercado y de los valores máximos y mínimos de S. El inversor 1 estaría invirtiendo en el momento óptimo $T^* = T^{**}_1$ si y solo su estimación condicional de la señal del inversor 2 es igual al verdadero valor de la misma,

[16] Plantea la diferencia entre la decisión de inversión basándose solo en la información propia, o incorporando información de mercado.

$$E_1\left[{S_2}\big/{x_2 = 0}\right] = S_2 \qquad [27]$$

de donde se sigue

$$\frac{S_1 + S_{min}}{2} = S_2 \qquad [28]$$

y

$$S_1 = 2S_2 - S_{min} \qquad [29]$$

Toda vez que el primer término sea mayor que el segundo, el inversor 1 estará sobreestimando el verdadero valor de la señal de 2, provocando que la inversión sea efectuada en un momento T anterior al óptimo, $T^{**}_1 < T^*$, donde el inversor 1 se apura a invertir. Si por el contrario el primer término es menor al segundo, el inversor 1 estará subestimando el verdadero valor de la señal S_2, y en ese caso esperará para ejercer su opción de inversión. Este será un caso de excesiva espera, donde $T^{**}_1 > T^*$.

4.2.2 Decisiones consecutivas de inversión

Se ha derivado el momento T^{**}_1 donde el inversor 1 decide ejercer su opción. El segundo punto está dado por las condiciones bajo las cuales el inversor 2, al observar la acción de inversión por parte del inversor 1 decide seguirlo y ejercer inmediatamente su opción real de inversión (caso especial de la situación A descripta en el gráfico 1). Al igual que el inversor 1, el inversor 2 no sabe en que medida su señal es la mas alta o no, pero tiene conocimiento del nivel de su propia señal privada S_2. Su expectativa inicial de la señal del otro inversor es $E_2[S_1] = 0$ conforme (20). Dada la evolución de V_t, existirá un momento T^*_2 donde sea óptimo para el inversor 2 ejercer su opción de inversión. Este momento T^*_2 puede ser menor o mayor a T^{**}_1: si $T^*_2 < T^{**}_1$, el inversor 2 tiene tiempo de revisar su expectativa condicional sobre S_1 a la baja (conforme las condiciones derivadas previamente respecto de la no inversión de 1 en [26]), dado que V_t alcanzará el valor óptimo V^*_2, y el inversor 2 se dará cuenta (al igual que lo hizo el inversor 1 en su oportunidad) que es el momento óptimo para invertir basado únicamente en el conocimiento de su propia señal S_2. Dado eventualmente observa que el inversor 1 no ha invertido, esta realidad lo obliga a revisar su expectativa sobre S_1, de igual manera que en su oportunidad el inversor 1 revisase su expectativa sobre la señal del inversor 2, S_2. De esta manera, este revisión de expectativas mueve la expectativa $E_2[S_1] = 0$ a la condicional $E_2[S_1/x_1=0] = (S_2 + S_{min})/2$, donde $E_2[S_1] > E_2[S_1/x_1=0]$ conforme [20] y [21]. Para que este suceda, se debe cumplir que

$$S_2 > S_1 + \left(\frac{S_1 + S_{min}}{2}\right) \qquad [30]$$

es decir que <u>los niveles de las señales deben encontrarse lo suficientemente próximos</u>.
Como ya fuese expuesto, de darse le desigualdad inversa en [30], implica que el inversor 2 no tiene tiempo de revisar su expectativa sobre θ a la baja, sino que observa la decisión de inversión por parte del inversor 1 lo que le hace revisar su expectativa sobre θ al alza condicional en la información que surge de la decisión tomada por el otro inversor (alternativa A del gráfico 1). Formulado este punto, desarrollo la condición que debe cumplirse para que el inversor 2 reaccione de manera inmediata a la decisión de inversión del inversor 1 e invierta. El inversor 2 seguirá la decisión de ejercer su opción de inversión imitando al inversor 1 si el valor esperado condicional de θ para el inversor 2 dado que el

inversor 1 invierte de acuerdo a [25] es mayor a valor esperado condicional de θ para el inversor 1 de acuerdo a [16]:

$$E_2\left[\theta / x_1 = 0\right] = S_2 + \frac{S_2 + S_{min}}{2} > E_1\left[\theta / x_2 = 0\right] = S_1 + \left(\frac{S_1 + S_{min}}{2}\right) < S_1 \qquad [31]$$

o lo que es lo mismo:

$$S_2 > S_1 - \frac{1}{3}\left[S_{max} - S_{min}\right] \qquad [32]$$

Es decir que para que haya comportamiento de seguimiento automático en las decisiones de inversión, los signos deben encontrarse lo suficientemente cerca*, aún cuando eso implique estimaciones de valor diferentes para los activos en cuestión;* de hecho los dos inversores invierten con distintas estimaciones del valor de θ V_t (en cada caso θ_i V_t) o mejor expresado, de la opción de inversión.

El nivel óptimo de inversión V_t óptimo disminuye para el inversor 2, de V^*_2 a V^{**}_2, dado que el nuevo valor condicional de θ es mayor que el previo por el ajuste de expectativas hacia arriba en base a la decisión de inversión por parte del inversor 1. Esta situación motiva que el inversor 2 decida eventualmente invertir inmediatamente, siguiendo la acción del inversor 1. Se puede observar que el inversor 1, que pose la señal mas alta (aún sin saber él que se encuentra con la mejor información), esta comandando las acciones, mientras que el inversor 2 esta siguiendo las acciones del inversor 1. Cuando el inversor 1 decide invertir, el inversor 2 decide (bajo ciertos parámetros) seguirlo o no inmediatamente porque reajusta sus expectativas.

Los efectos que se observa son los siguientes:

- por un lado puede existir un efecto de "inversión apresurada", o eventualmente de "excesiva espera" como consecuencia de la falta de coordinación de los inversores de su información. Este efecto difiere de aquel observado por Grenadier (1999).
- otro efecto observado es cuando se produce una cascada informativa, la inversión se realiza casi en simultáneo como consecuencia de la misma: cuando el agente mas optimista decide invertir, revela al mercado la naturaleza de su signo (aunque no su valor) y el agente menos informado revisa instantáneamente sus expectativas, lo que en algunos casos lo lleva a seguirlo de manera inmediata y ejercer su opción de inversión.
- un efecto que difiere de aquellos observados por Grenadier (1999) es que ninguno de los inversores sabe quien posee la señal mas alta (quienes el mas optimista) hasta tanto la variable estado no llega al valor óptimo en base a la expectativa condicional de θ y se libera información; asimismo la secuencia de inversiones difiere en que el primer inversor que ejerce su opción y muestra información al mercado es aquel con la señal mas alta, y no como en el trabajo citado aquel con la señal mas alta en *valor absoluto o "mejor informado"*.

En el presente modelo, como consecuencia de la incertidumbre con respecto a la señal del otro inversor y el proceso de formación de expectativas, el primer inversor que entra en el mercado es aquel con la señal mas alta.

4.3 El caso de n inversores

Se ha desarrollado en la sección previa un caso de inversión apresurada o excesiva espera y eventuales comportamientos de manada en el ejercicio de las opciones de inversión para

dos inversores propietarios de opciones de inversión, siendo ambos efectos perfectamente racionales en un contexto de existencia de información imperfecta y dificultades de agregación y coordinación de la información. En la presente sección se extiende el modelo a $n > 2$ inversores, con las mismas reglas de decisión, formación y revisión de expectativas, donde la intuición desarrollada se mantiene.
Cada inversor es propietario de una opción de inversión en activos reales, cuyo payoff al momento de ejercer es $\theta V_t - I$. Se asume nuevamente una distribución uniforme para las señales pertenecen al espacio:

$$S_i \in [S_{min}, S_{max}],\ i = 1,\ldots, n, \text{ con } S_{min} < 0,\ S_{max} > 0 \qquad [33]$$

donde los agentes se encuentran indexados de 1 a n en función del valor de su señal privada, $S_1 > S_2 > S_3 > \ldots. S_n$, y en el agregado dan lugar al coeficiente de agregación de información:

$$\theta = \mu + S_1 + S_2 + \ldots + S_n \qquad [34]$$

donde

$$\mu > \Sigma (S_i)^{17}, \quad \text{para } i = 1\ldots n \qquad [35]$$

lo que nuevamente garantiza el ejercicio de las opciones en algún momento de tiempo T finito al igual que con [12]. Nuevamente se denota la acción de inversión a través de la variable binaria expuesta en [13a] y [13b] para cada inversor i.
Inicialmente, al igual que en el modelo de dos inversores, cada inversor desconoce la posición relativa de su señal con respecto al resto, con lo cual forma su expectativa incondicional con su señal S_i, y cada inversor i tiene su expectativa sobre la señal del otro inversor j ($j \neq i$) condicional en ninguna decisión tomada, lo que es equivalente a $x_j=0$

$$E_i\left[S_j / x_j = 0\right] = 0 \forall \ldots j \neq i \qquad [36]$$

lo que significa que el valor esperado de θ para el inversor i es

$$E_i\left[\theta / x_j = 0\right] = S_i \qquad [37]$$

en base al hecho que el resto de los inversores no ha ejercido su opción y la variable estado V_t no ha alcanzado ningún valor crítico. Este proceso inicial de formulación de expectativas es similar para todos los inversores en el mercado y al tratado en el punto anterior. Se ordenan los inversores de mayor a menor de acuerdo al nivel de su señal, definiendo al inversor 1 como aquel que tiene el mayor valor S_i (el mas optimista) y así sucesivamente. Por la natural evolución de V_t conforme la dinámica [2], habrá un momento $T^*_1 < \infty$ tal que V_t alcanza el valor óptimo V^*_1 para el inversor 1 conforme [8], sabiendo que hasta ese momento nadie ha ejercicio su opción de inversión, donde $E_1[\theta] = S_1$ conforme la ecuación derivada en [37]. De similar manera al caso donde n=2, en ese momento y conforme la ecuación de pricing de la opción de inversión real, se revela óptimo invertir para el inversor 1, en base a la información contenida en su señal únicamente. Sin embargo el inversor 1 entiende que no se encuentra solo, y procesa el hecho que el resto de los inversores han decidido no invertir aún. En base a esto, revisa su expectativa condicional del valor de θ

[17] Válida la simplificación de exposición hecha en la nota 14.

dado que ahora infiere que el nivel de las señales S_j ($j \neq i$) se encuentra en algún lugar entre S_{min} y S_1 para cada inversor j ($j\neq1$), siendo el nuevo valor condicional de θ para 1 igual:

$$E_1\left[\theta / x_j = 0, \forall j \neq 1\right] = S_1 + (n-1) * \left(\frac{S_1 + S_{min}}{2}\right) < S_1 \qquad [38]$$

y dado que θ refleja el agregado de señales, y x_j =0 (para $j\neq1$) revela que ningún inversor ha ejercido su opción de inversión, el inversor 1 coloca su expectativa condicional de S_j entre la suya (S_1) y S_{min}. Esta revisión de expectativas sobre θ provoca que el inversor 1 entienda que debe esperar que V_t crezca aún mas consistente con un proceso de revisión de expectativas de la forma:

$$E_i\left[\theta / x_j = 0, \forall j \neq i\right] = S_i + (n-1) * \left(\frac{S_i + S_{min}}{2}\right) < S_i = E_i[\theta] \qquad [39]$$

que implica según [8] un valor óptimo reformulado mayor $V^{**}_1 > V^*_1$ de similar manera al proceso expuesto en el punto anterior, pero observando aquí que el hecho de haber mayor cantidad de participantes en el mercado amplifica la estimación condicional sobre los niveles de las señales del resto de los inversores, al estar escalado por la cantidad remanente de inversores en el mercado[18]. Esto incrementa aún mas el valor V^{**}_1 óptimo de inversión con respecto al caso de n = 2. Es decir que el inversor 1 no invierte, y no revela información al mercado, siendo su nivel de V_t óptimo (V^{**}_1) mas alto que con respecto al caso donde n=2. De la misma manera actúa cada inversor j ($j\neq1$) , donde el valor esperado inicial de θ es similar al caso anterior

$$E_j\left[\theta / x_i = 0\right] = S_j \text{ para todo } i \neq j \qquad [40]$$

donde habrá un momento T^*_j para cada inversor $j\neq i$ donde, al igual que en el caso de dos inversores:

- se revele lógico invertir conforme únicamente al nivel de su señal S_j, siguiendo el mismo proceso de inferencia y revisión de expectativas que el inversor 1, con lo que el inversor j revisa su expectativa sobre θ a la baja condicional en la observación que nadie ha invertido.
- se observe que el inversor 1 invierte, lo que provoca que el resto de los inversores revisen sus expectativas condicionales sobre θ hacia arriba en lugar de hacia abajo (dado que existe información revelada al mercado).

La condición para que suceda uno u otro ha sido objeto de tratamiento en la sección previa, por lo que no hace falta repetirla. Si es menester mencionar que una de las dos situaciones se produce: el inversor 2 (y todos los que le siguen) revisa sus expectativas a la luz de la inversión o la falta de la misma por parte de otros inversores. En este último caso, el inversor 2 (que no sabe que el inversor 1 tiene una señal mas alta), revisa su expectativa condicional sobre θ de la misma manera que el inversor 1 la revisó en su oportunidad, donde al observar falta de ejercicio por parte del inversor 1 asume que el nivel de su señal S_2 es en realidad el mas alto y en consecuencia reacciona revisando su nivel óptimo $V^{**}_2 > V^*_2$ de manera análoga al caso del inversor 1:

[18] El valor estimado de la señal promedio (condicional) multiplicado por los participantes en el mercado, exceptuando al inversor i.

$$E_2\left[\theta / x_i = 0, \forall i \neq 2\right] = S_2 + (n-1) * \left(\frac{S_2 + S_{min}}{2}\right) \qquad [41]$$

donde

$$E_1\left[\theta / x_i = 0, \forall i \neq 1\right] > E_2\left[\theta / x_i = 0, \forall i \neq 2\right] \qquad [42]$$

El resto de los inversores (3 a n) actúan de similar manera.
La dinámica de V_t lleva a que en algún momento T^{**}_1 para determinado valor de $V=V^{**}_1$ sea óptimo para el inversor 1 invertir, conforme su expectativa sobre el valor de θ condicional en la no inversión por parte del resto de los inversores y de acuerdo a la condición [39]. Según dicha condición, el valor esperado condicional de θ es mayor para el inversor 1 que para el resto, por lo que éste es el primero que deberá tomar la decisión de invertir cuando $V_t = V^{**}_1$, entonces el inversor 1 invierte y revela con su decisión parte de su información al mercado y al resto de inversores. Esta situación provoca que el inversor 2 (y el resto de los inversores) revise automáticamente su expectativa condicional del nivel de la señal del inversor i:

$$E_2\left[S_1 / x_1 = 1, x_i = 0, \forall i \neq 1{,}2\right] = \frac{S_2 + S_{max}}{2} \qquad [43]$$

donde el valor esperado condicional de θ para el inversor 2 será:

$$E_2\left(\theta / x_1 = 1, x_i = 0, \forall i \neq 1{,}2\right) = S_2 + \left(\frac{S_2 + S_{max}}{2}\right) + (n-2) * \left(\frac{S_2 + S_{min}}{2}\right) \qquad (44)$$

luego de la revisión de expectativas a la luz de las decisiones de inversión o no inversión de cada participante. En [44] se evidencia el hecho que en la revisión de expectativas sobre θ que el inversor 2 realiza (el segundo mas optimista, o el que posee el nivel de señal S mas alta después de la de 1, dado el ordenamiento hecho) incorpora la decisión de inversión del inversor 1, e incorpora la no inversión por parte del resto de los inversores.
Cada inversor i (aparte de 1 y 2) lleva adelante el mismo proceso de revisión de expectativas, internalizando la decisión de inversión por parte de los mas optimistas y la decisión de no inversión por parte del resto. Así, el inversor 3, (el tercero con la señal mas alta) incorpora la decisión de inversión por parte de 1, y la inversión o no por parte de 2, y la no inversión por parte del resto. De esta manera, si 3 observa que 1 invierte y 2 no, revisa su expectativa sobre θ hacia

$$E_3\left[\theta / x_1 = 1, x_i = 0, \forall i \neq 1{,}3\right] = S_3 + \left(\frac{S_3 + S_{max}}{2}\right) + (n-2) * \left(\frac{S_3 + S_{min}}{2}\right) \qquad [45]$$

mientras que si observa que ambos invierten, el inversor 3 revisa su expectativa sobre θ hacia:

$$E_3\left[\theta / x_{1,2} = 1, x_i = 0, \forall i \neq 1{,}2{,}3\right] = S_3 + 2 * \left(\frac{S_3 + S_{max}}{2}\right) + (n-3) * \left(\frac{S_3 + S_{min}}{2}\right) \qquad [46]$$

Similarmente procede el resto de los inversores en su revisión de expectativas frente a la revelación de información a través de la inversión o falta de ella.

Al igual que en el caso analizado de dos inversores, existen dos situaciones que vale la pena desarrollar:

- la inversión por parte de 1 en un momento T diferente al óptimo bajo información perfecta;
- el comportamiento de manada en el que un inversor observa la inversión por parte de otro, y decide imitarlo. Se desarrolla ambos a continuación.

4.3.1 Timing de la inversión

La primera situación de análisis corresponde a las condiciones bajo las cuales el inversor mas optimista (indexado por el número 1) invierte en un momento T** < T óptimo bajo información perfecta (inversión apresurada) o en un momento T** > T óptimo (excesiva espera). Al igual que en el caso de n=2 descripto en el punto 4.2.1, ambas situaciones de desvío estarán condicionadas por las expectativas que se forma el inversor 1. Como se ha desarrollado, el inversor 1 tiene inicialmente una expectativa de θ igual a S_1, que luego revisa cuando observa que llega el momento óptimo para invertir conforme su propia señal (el momento T^*_1), y nadie ha invertido aún; esto le hace pensar que su señal es la mas alta, y a partir de esa inferencia se forma una expectativa de las señales del resto de los inversores, de la forma:

$$E_1\left[\theta / x_i = 0, \forall i \neq 1\right] = S_1 + (n-1) * \left(\frac{S_1 + S_{min}}{2}\right) \qquad [47]$$

Cuando V_t alcanza el nuevo valor crítico V^{**}_1 de acuerdo a la ecuación [8] conforme el nuevo valor esperado condicional de θ según [47], el inversor 1 decide ejercer su opción de inversión siendo el primero en hacerlo, ya que su expectativa condicional de θ según [47] es la mas alta, dado que él posee la señal mas alta. Bajo información perfecta, el inversor 1 al igual que el resto de los inversores debieran ejercer sus opciones cuando V_t alcanza un valor V* según [8] consistente con $\theta = \Sigma S_i$[19], i=1…n; esto significa que el inversor 1 invertirá apresuradamente si:

$$S_1 + (n-1) * \frac{S_1 + S_{min}}{2} > S_1 + \sum_{i \neq 1}^{n} S_i \qquad [48]$$

de donde, reagrupando, se obtiene que:

$$S_1 > 2 * \frac{\sum_{i \neq 1}^{n} S_i}{n-1} - S_{min} \qquad [49]$$

de donde

$$S_i > 2 * \overline{S_{i \neq 1}} - S_{min} \qquad [50]$$

que es una condición muy similar a la obtenida para el caso de n=2 inversores en [28] y [29], donde S_2 es reemplazado en este caso por el valor promedio de las señales del resto de los participantes (exceptuada la señal del inversor 1).

De darse este sentido en la desigualdad, al decidir ejercer su opción de inversión el inversor 1 estará sobreestimando el verdadero nivel de las señales privadas del resto de los

[19] $\theta = \mu + \Sigma S_i$ si se restablece la condición a su formato original.

inversores, lo que lo hace excesivamente optimista respecto a θ y lo lleva a apurar su inversión. De similar manera, se observará excesiva espera si

$$S_1 < 2 * \overline{S_{i \neq 1}} - S_{min} \qquad [51]$$

dado que el inversor subestima el verdadero nivel de las señales del resto de los inversores, lo que lo lleva a esperar en demasía.
En ambos casos, el "leading investor" (rotulado por i=1) se desvía en su decisión del momento T* óptimo de inversión bajo información perfecta, debido al ruido respecto de la agregación de información y la falta de coordinación en las decisiones de inversión.

4.3.2 Decisiones consecutivas de inversión

La segunda situación que es meritorio analizar esta relacionada al comportamiento de manada que puede llegar a surgir como consecuencia de una cascada informativa frente a la decisión de inversión por parte de alguno de los inversores. Como se ha expuesto, existe un momento T^{**}_1 en el cual el inversor 1 (mas optimista de acuerdo a su señal privada) decide invertir. Esto revela información al resto de los inversores (como así también cuando V alcanza los valores críticos iniciales V^*_i para cada inversor i, y los mismos observan la falta de inversión o no del resto), los cuales revisan sus expectativas a partir de esta acción. Como ya fuese expuesto, los inversores se encuentran indexados de 1 a n de acuerdo al nivel de su señal privada de la forma $S_1 > S_2 > S_3 > \ldots\ldots\ldots > S_n$. El inversor 1 decide ejercer su opción de inversión, y revela información al resto de los inversores, los cuales revisan sus expectativas a la luz de dicho evento. Cada inversor restante observa las decisiones de inversión o no inversión, ubica su expectativa condicional de θ en base a dicha información, y tiene la alternativa de invertir (siguiendo la conducta del "leading investor" y de los que han decidido invertir) o esperar. El inversor que debe decidir a continuación es el que posee la segunda señal mas alta, quien se encuentra indexado con el número i=2. Para que el inversor 2 decida emular la conducta del inversor 1 e invertir inmediatamente, se debe dar en el proceso de revisión de expectativas que el valor esperado condicional de θ para el inversor 2 dado que observa que el inversor 1 invierte y el resto de inversores no lo hace, expuesto en la siguiente ecuación:

$$E_2\left[\theta / x_1 = 1, x_i = 0, \forall i \neq 1,2\right] = S_2 + \left(\frac{S_2 + S_{max}}{2}\right) + (n-2) * \left(\frac{S_2 + S_{min}}{2}\right) \qquad [52]$$

es mayor a valor esperado condicional de θ para el inversor 1,

$$E_1\left[\theta / x_i = 0, \forall i \neq 1\right] = S_1 + (n-1) * \left(\frac{S_1 + S_{min}}{2}\right) \qquad [53]$$

o reagrupando términos en [52] y [53]:

$$S_2 < S_1 - \frac{1}{n+1} * \left[S_{max} - S_{min}\right] \qquad [54]$$

que es la condición general para n inversores de la condición particular expuesta en [32]. Es decir que para que el inversor 2 se decida a seguir al inversor 1 en su decisión de inversión, su señal debe encontrarse lo suficientemente cercana (e.g., no debe superar una distancia crítica dada por

$$d = \left[\frac{S_{max} - S_{min}}{n+1}\right] \qquad [55]$$

A continuación decide el inversor 3 (que posee el tercer nivel de señal). En este caso se plantean dos situaciones:
- que el inversor 2 haya decidido no invertir, porque su señal se encuentra a una distancia mayor a la crítica
- que el inversor 2 haya decidido invertir.

Si el inversor 2 decidió no seguir por el momento al inversor 1 en el ejercicio de su opción de inversión, el inversor 3 observa que 1 invierte y 2 no. En consecuencia el no invierte dado que no es mas optimista que el inversor 2, lo cual corta la cadena de ejercicio de opciones de inversiones reales en dicho momento.
Por otro lado, si el inversor 2 decidió invertir, el inversor 3 debe decidir entre invertir o no dado que observa que dos inversores han invertido. De similar manera al caso del inversor 2 descripto a través de las ecuaciones [52], [53], y [54], el inversor 3 decide invertir e imitar la conducta de sus antecesores si al revisar su expectativa condicional dada la información revelada al mercado:

$$E_3\left[\theta / x_{1,2} = 1, x_i = 0, \forall i \neq 1,2,3\right] = S_3 + 2 * \left(\frac{S_3 + S_{max}}{2}\right) + (n-3) * \left(\frac{S_3 + S_{min}}{2}\right) \qquad [56]$$

es mayor a valor esperado condicional de θ para el inversor 1, expresado por la ecuación (53), lo que reagrupando términos nos permite exponer la condición límite:

$$S_3 < S_1 - \frac{2}{n+1} * \left[S_{max} - S_{min}\right] \qquad [57]$$

Es decir que para que el inversor 3 decida seguir al inversor 1 e invertir inmediatamente (dado que el inversor 2 ha decidido invertir), su señal debe encontrarse lo suficientemente cercana (e.g., la distancia entre las dos no supera dos veces la distancia crítica d expresada en [55]:

$$S_3 < S_1 - 2 * d \qquad [58]$$

De hecho, dado que el inversor 2 ha invertido, la señal de dicho inversor se encuentra a una distancia no mayor a la crítica según [54] y [55], por lo que es suficiente para que el inversor 3 decida invertir inmediatamente que su señal se encuentra a una distancia menor a la crítica con respecto a la señal del inversor 2:

$$S_3 < S_2 - \frac{1}{n+1} * \left[S_{max} - S_{min}\right] \qquad [59]$$

De similar manera y mas generalmente, el inversor indexado por j decide ejercer inmediatamente dado que observa ejercicio de opciones de inversión por parte de sus antecesores, si

$$E_j\left[\theta / x_j = 1, \forall i < j, x_i = 0, \forall i > j\right] = S_j + (j-1) * \left(\frac{S_j + S_{max}}{2}\right) + (n-j) * \left(\frac{S_j + S_{min}}{2}\right) \qquad [60]$$

es mayor a valor esperado condicional de θ para i,

$$E_i\left[\theta / x_i = 0, \forall i \neq 1\right] = S_i + (n-1) * \left(\frac{S_i + S_{min}}{2}\right) \qquad [61]$$

o reagrupando términos:

$$S_j < S_i - \frac{(j-1)}{n+1} * \left[S_{max} - S_{min}\right] \qquad [62]$$

lo que es similar a lo expuesto en [57] y [58] respecto que las decisiones de ejercicio inmediato de opciones de inversión ocurrirán para todo agente j y j-1 cuyas señales se encuentren a una distancia inferior a la distancia crítica d:

$$S_j - S_{j-1} < d \qquad [63]$$

dado que todos los agentes i con señales menores a la del agente j han ejercido sus opciones de inversión y revelado información al mercado de manera previa.
En caso que la desigualdad en [63] se verificase en sentido contrario, el inversor j no copia instantáneamente la decisión de inversión del agente j-1, sino que espera a que el valor de la variable estado V_t alcance su valor crítico V^{**}_j.
Se puede observar entonces que el espacio entre señales debe ser suficiente amplio (mayor a la distancia crítica d) para que un inversor decida no invertir inmediatamente (y viceversa). Mas aún, si un inversor z decide no invertir y esperar hasta que el valor V_t alcance el valor crítico V^{**}_z conforme a su revisión de expectativas, el resto de los inversores no invertirá, ya que no son mas optimistas en su revisión de expectativas, lo que corta la cascada informativa hasta que el inversor z encuentre óptimo invertir, donde frente a dicho ejercicio de la opción de inversión se aplica la misma condición de distancia crítica d, revisando el resto de inversores sus expectativas (dadas las inversiones iniciales y esta nueva inversión) incorporando la información revelada al mercado, y decidiendo si invierten inmediatamente o no.
En todos los casos, la cascada informativa y la inversión automática luego de la revisión de expectativas dado el ejercicio de opciones de inversión por parte de otros inversores, se dará para aquellos inversores cuya señal se encuentra a una distancia menor a la distancia crítica d conforme a [55] de la señal del inversor inmediatamente anterior que ha ejercido su opción de inversión. Esto implica que señales privadas que se encuentren próximas en sus niveles motivarán conductas de ejercicio instantáneo de opciones de inversión reales ante la información revelada al mercado por parte de un inversor. El elemento que introduce la imperfección en la información es que para señales lo suficientemente cercanas, la decisión de inversión por parte de un inversor puede hacer que otro lo siga automáticamente aún cuando las señales no sean iguales. Esto podría dar lugar a conductas mucho mas volátiles de las valuaciones efectuadas de las oportunidades de inversión, y en un patrón de inversiones mas volátil también, motivados por los bruscos cambios de expectativas frente a la información revelada al mercado de inversiones.

4.4 Sensitividad del comportamiento de inversores frente a cambios en los parámetros.

En esta sección desarrollo sobre la sensitividad de la variable d de distancia frente a cambios en dos parámetros relevantes:

- el grado de dispersión de las expectativas (medido por el rango S_{max} - S_{min})
- el número n de participantes en la decisión de inversión.

Esta variable d determina en que medida las decisiones de ejercicios de opciones de inversión son gatilladas de manera automática o no, por lo que su nivel es de relevancia en dicho sentido. Expresando nuevamente la condición de distancia crítica según [55],

$$d = \left[\frac{S_{max} - S_{min}}{n+1} \right] \qquad [55bis]$$

se observa que un incremento en el rango de dispersión S_{max} - S_{min} afecta en sentido positivo la distancia crítica d y por ende la posibilidad de la existencia de comportamiento de ejercicio automático de decisiones de inversión, de la forma :

$$\frac{\partial d}{\partial [S_{max} - S_{min}]} = \frac{1}{1+n} > 0 \qquad [64]$$

siempre que S_{max} - S_{min} sea mayor que cero (lo que se da en el presente caso ya que S_{max} es mayor a S_{min}). La intuición viene dada por el hecho que el incremento en el rango hace mas difícil la estimación de los valores de las señales del resto de los participantes. A los efectos intuitivos, vale la pena analizar el caso contrario; al achicarse el rango S_{max} - S_{min} hasta un único valor S, todos los inversores tendrían plena conocimiento y seguridad en cuanto al nivel individual y agregado de la señales, despejando cualquier tipo de incertidumbre y problema en la agregación de información y coordinación de las decisiones, dando lugar a un ejercicio automático y eficiente de las opciones de inversión en el momento adecuado. Este resultado implica que mientras mas subjetivas y mas separadas se encuentren la señales individuales de los inversores participantes, mas proclive serán a seguimientos automáticos en las decisiones de inversión.

El otro aspecto que es interesante analizar es el impacto que tiene sobre la distancia crítica el incremento en el número de inversores n poseedores de opciones reales de inversión en el mercado. En este caso se observa que el valor de la derivada parcial es negativo:

$$\frac{\partial d}{\partial n} = [S_{max} - S_{min}] * \left(\frac{-1}{(1+n)^2} \right) < 0 \qquad [65]$$

que nos indica que a medida que se incrementa el número de participantes en el mercado, el valor de la distancia crítica disminuye, y con ello disminuye la posibilidad de un comportamiento de manada por parte de los inversores frente al ejercicio de sus opciones reales de inversión. Este efecto ya lo había sido intuido cuando se pasó de un modelo de n=2 inversores a un modelo de n>2 inversores.

En resumen, lo que evidencia la estática comparativa es que mientras menos inversores haya en el mercado, y mientras mayor sea la dispersión en los posibles valores de las señales privadas S_i, mayor será la probabilidad que en un mercado en particular surja una cascada informativa dando lugar al ejercicio automático de opciones de inversión real y provocando bruscos momentos de inversión seguidos de una relativa calma. Mercados poco desarrollados conllevan este tipo de riesgos, que cuando se trata de mercado de capitales, afectan a la economía en su conjunto.

5 Modelo para decisiones de abandono de inversiones

El modelo expuesto en los puntos 2, 3 y 4 es desarrollado para un conjunto de inversores que poseen opciones de inversión sobre un activo V_t donde la información es agregada dando lugar a un parámetro θ que afecta la función de repago de la opción de inversión, conforme la ecuación [1].
De manera análoga, se puede generar el mismo modelo donde los inversores en lugar de poseer opciones de inversión, posean opciones de abandono, similares a una opción de venta ("put option") y que se pueden asociar a los conceptos y modelo expuesto en el capítulo anterior, considerando un activo cuyo valor subyacente sigue un proceso de la forma descripta en [2] y un coeficiente de agregación de signos privados como el expuesto en [3].
En este caso, el inversor posee sin límite de tiempo la alternativa de salirse de una inversión, recibiendo como contrapartida un valor alternativo de liquidación definido como L[20], de donde la función de repago para el inversor será de manera análoga a 1:

$$\text{Max}\,[L - \theta\, V_t,\, 0] \qquad [66]$$

La solución para el valor de dicha opción P(V) es similar a la expuesta en el punto 3, en base al modelo de replicación de portafolio conforme las ecuaciones [4] y [5], el modelo básico para opciones de venta ("puts") perpetuas[21], y se aplican la siguientes condiciones de límite para derivar la solución:

$$\text{Lim } P_{V\to\infty} = 0 \qquad [67a]$$
$$P(V^*) = L - \theta V^*(\theta) \qquad [67b]$$

donde el V* refleja el valor V_t en el cual es óptimo ejercer el derecho de abandono según el valor de recupero L del activo; la forma funcional de $P(V;\theta)$ se obtiene fácilmente. La solución para el valor de la opción P(V) y el valor límite de abandono V* puede ser expresada entonces como:

$$P(V;\theta) = \begin{cases} (L/(1+\beta))^{1+\beta}\, \beta^{\beta}\, (\theta V)^{-\beta} & \text{para } V > V^*(\theta) \qquad [68a] \\ L - \theta V & \text{para } V \leq V^*(\theta) \qquad [68b] \end{cases}$$

donde

$$V^*(\theta) = \frac{\beta}{1+\beta}\frac{L}{\theta} < L \qquad [69]$$

y

$$\beta = \frac{-(\alpha-\sigma^2/2) + \sqrt{(\alpha-\sigma^2/2)^2 + 2r\sigma^2}}{\sigma^2} > 1 \qquad [70]$$

[20] Que se puede asociar a un valor de "recupero" de un activo; en aplicaciones a financiamiento corporativo puede ser asociado al valor nominal de deuda cuando se utiliza este instrumento de financiamiento, siendo V el valor de los activos que la respaldan.
[21] Ver Anexo A del capítulo III de Dapena (2004ª).

La ecuación [69] representa el valor de ejercicio $V^*(\theta)$ consistente con información plena. De esta manera todos los agentes abandonan su inversión en el momento de tiempo $T^*(\theta)= \inf(t \geq 0: V(t) \leq V^*(\theta))$.
Habiendo derivado la solución, el resto del análisis es similar a lo desarrollado en el punto 4 del presente trabajo, haciendo la siguiente salvedad: dado que en este caso la opción de abandono tiene valor cuando la variable estado V_t se mueve hacia valores inferiores, la formación de expectativas y el proceso de revisión de expectativas estará liderado por aquel inversor con la señal S_i mas baja, es decir la del extremo inferior. En este caso se puede ordenar los agentes de menor a mayor de acuerdo a sus señales S_i, y las ecuaciones, cálculos y resultados del punto 4 son válidos en su totalidad. En el punto 4, el inversor S_1 (mas optimista, o con la señal S mas alta) lideraba el proceso de inversión a través del ejercicio de su opción; en el caso de opciones de abandono, quien lidera el proceso es el inversor con la señal S_i mas baja, y los resultados de abandono prematuro o tardío (equivalente a la inversión temprana o tardía expuesta en 4.2.1 y 4.3.1) y de ejercicio automático de opción de abandono (equivalente a lo expuesto en los puntos 4.2.2 y 4.3.2) obtenidos previamente son válidos. Mas aún, existirá una distancia crítica d conforme [55] que actúa de manera similar con respecto a la secuencia automática de abandono, estando dicha distancia influenciada por los parámetros expuestos en el punto 4.4.

6 Conclusiones

Las decisiones de entrada en inversiones y de abandono de las mismas puede ser analizadas utilizando la metodología de opciones reales (herramientas de la teoría de opciones financieras aplicadas al análisis de inversiones de capital en la economía real). Sin embargo, la información concerniente a los parámetros de estas opciones reales puede estar sujeta a algún tipo de error de estimación. Estos errores de estimación pueden dar lugar a la existencia de comportamientos de inversión o abandono prematuro, y viceversa. De similar manera, esta información imperfecta puede dar lugar a la existencia de cascadas informacionales y comportamientos de manada respecto a oportunidades de inversión y decisiones de abandono, donde la conducta de un inversor es copiada por otros, aún cuando poseen información privada ligeramente diferente. En el trabajo se han desarrollado las condiciones bajo las cuales esta conducta se ve exacerbada; esto sucede cuando hay pocos inversores en el mercado, y cuando el rango de posibles valores para las señales privadas de los inversores es demasiado amplio(es decir, existe mucha dispersión o incertidumbre en las expectativas privadas respecto del verdadero valor). Ambos elementos pueden ser asociados a mercados poco desarrollados, donde no existe un número significativo de jugadores dentro del mercado, y donde gran parte de la estimación es realizada de manera privada en lugar de verse reflejada a través de los precios de mercado, dando lugar a una dispersión quizá significativa de estos valores privados. Justamente podría ensayarse que gran parte de la tarea de los mercados (en este caso relativo a inversiones de capital y abandono de dicho capital) es la de reflejar la información a través de los precios reduciendo su asimetría y dispersión. Mercado de capitales poco desarrollados o existencia de mucha incertidumbre pueden dar lugar a la existencia de decisiones de inversión y abandono temprano o tardío, con eventuales conductas de manada o decisiones automáticas de inversión y abandono, motivadas por las consideraciones descriptas anteriormente, que pueden dan lugar a una excesiva amplificación de los valores de los activos objetos de inversión o de abandono. Como tarea pendiente se puede considerar el testeo empírico de los modelos que puede ser una avenida interesante de futura investigación.

Referencias

Arrow, K. (1962). "The Economics Implications of Learning by Doing". *Review of Economics Studies* 29, 155-173.

Banerjee A. (1992), "A Simple Model of Herd Behaviour". *Quarterly Journal of Economics* 107, 797-817

Black F., y Scholes M. (1973), '' The Pricing of Options and Corporate Liabilities'' *Journal of Political Economy* 81 (May-June): 637-659.

Caplin A. y Leahy J. (1994), "Business as Usual, Market Crashes and Wisdom after the Fact". *American Economic Review* Vol 84 Nro. 3.

Cox J., Ross, S., y Rubinstein M. (1979), '' Option pricing: A simplified approach'' *Journal of Financial Economics* 7, no. 3:229-263

Dapena J., (2004a). "Opciones Reales para Decisiones de Inversión y Abandono en Contextos Macro de Volatilidad del Producto con Extensión a Mercado de Capitales ". Tesis Doctoral Universidad del CEMA, no publicada.

Dapena J., (2004b). "Un Modelo de Relación entre Volatilidad en Tasas de Crecimiento del Producto y Volatilidad en Tasas de Crecimiento en el Precio del Stock de Capital". Presentado en la XXXIX Reunión Anual de la Asociación Argentina de Economía Política.

Dixit A. y Pindyck R. S. (1994), *Investment under Uncertainty*, Princeton University Press, Princeton, N.J.

Ellison G. y Fudenberg D. (1993), "Rules of Thumb of Social Learning". *Journal of Political Economy* 101, 612-643.

Gale D. (1996), "What have we learned from Social Learning?". *European Economic Review* 40, 617-628.

Grenadier S. (1999), "Information Revelation through Option Exercise". *The Review of Financial Studies* Vol 12 Nro 1 95-129.

Grenadier S. (2000), *Game Choices: The Intersection of Real Options and Game Theory*. Risk Publications

Ingersoll J. (1987), *Theory of Financial Decision Maki*ng, Studies in Financial Economics. Rowman & Littlefield Publishers inc.

Kogut B. y Kulatilaka N., (2001), "Capabilities as Real Options". *Organization Science* Vol 12 Issue 6.

Kulatilaka N. y Marcus A. (1992), '' Project valuation under Uncertainty: when does DCF fail?'' *Journal of Applied Corporate Finance* 5, no. 3: 92-100

Kulatilaka N. (1995ª), '' The Value of Flexibility: A Model of Real Options'' in *Real Options in Capital Investment*. Ed. L. Trigeorgis. Praeger.

Mc Donald R. y Siegel D. (1984), '' Option Pricing When the Underlying Asset Earns a Below-Equilibrium Rate of Return: A Note'' *Journal of Finance* (March), 261-265

Mc Donald R. y Siegel D. (1985), ' ' Investment and the Valuation of Firms Whethere is an Option to Shut Dow' '*International Economic Review* 26 (June), 331-349

Mc Donald R. y Siegel D. (1986), ' ' The Value of Waiting to Invest'*Quarterly Journal of Economics* (November) 101, 707-728

Merton R. C. (1973), ' ' Theory of Rational Opti Pricing' '*Bell Journal of Economics and Management Science* 4, no. 1: 141-183.

Myers S. (1977), ' ' Determinants of Corporate Borrowing '*Journal of Financial Economics* 5.

Stiglitz J. y Weiss A. (1981), "Credit Rationing in Markets with Imperfect Information", *American Economic Review* 71 (3): 393-410.

Trigeorgis L. (1988), ' ' A Conceptual Options Framework for Capital Budgeting'*Advances in Futures and Options Research* 3:145-167.

Trigeorgis L. (1997), *Real Options: Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation.* The MIT Press, Cambridge Massachussets.